

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月9日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2008～2011

課題番号：20684002

研究課題名（和文） 高次元極小モデル理論に現れる特異点の研究

研究課題名（英文） Study of singularities in the minimal model theory in higher dimension

研究代表者

川北 真之（KAWAKITA MASAYUKI）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10378961

研究成果の概要（和文）：極小対数的食違い係数の有界性を、Riemann-Roch の定理を用いて重複度或いは埋込次元の有界性に帰着させ、超平面切断としての Artin 環の解析から 3 次元の係数の有界性及び 3 次元 Gorenstein 端末特異点の特徴付けを回復した。昇鎖律の視点からは、Kollár と de Fernex, Ein, Mustața による対数的標準性のイデアル進半連続性の、極小対数的食違い係数への拡張を研究して、純対数的端末特異点の設定での半連続性をモチーフ積分論を用いて証明した。3 次元因子収縮写像の分類も研究した。

研究成果の概要（英文）：I reduced the boundedness of minimal log discrepancies to the boundedness of multiplicities or embedding dimensions by using Riemann-Roch theorem, and through the analysis of Artinian rings as hyperplane sections, I recovered this boundedness in dimension 3 and the characterisation of 3-fold Gorenstein terminal singularities. From the point of view of the ascending chain condition, I studied the extension of the ideal-adic semi-continuity of log canonical thresholds due to Kollár and de Fernex, Ein, Mustața, to minimal log discrepancies, and proved this semi-continuity in the setting of purely log terminal singularities by using the theory of motivic integration. I studied also the classification of 3-fold divisorial contractions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2009年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2010年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2011年度	2,200,000	660,000	2,860,000
年度			
総計	9,000,000	2,700,000	11,700,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：極小モデル理論 極小対数的食違い係数 モチーフ積分 イデアル進位相 昇鎖律

1. 研究開始当初の背景

| 双有理幾何学の基礎は、各双有理同値類を

代表する多様体の抽出及び解析である。極小モデル理論はその抽出を標準因子の比較によって実現させる理論であり、対数的極小モデルプログラム (LMMP) として定式化されている。

LMMP の完成には、フリップの存在と終止が必要である。3次元では森が本来のプログラムを作り、その後主に Shokurov の努力により 3次元 LMMP が完成した。近年 Birkar, Cascini, Hacon, McKernan は特殊な状況下での LMMP を機能させ、特に一般次元でフリップの存在を証明した。目下、フリップの終止予想が最重要な課題である。

2. 研究の目的

私のさしあたっての研究目標は、終止予想の視点からの、LMMP の過程で現れる特異点の局所構造の解明である。研究の対象は極小対数的食違い係数である。LMMP の特異点は極小対数的食違い係数により定義され、係数の大小は特異点の程度を反映する。さらに Shokurov によってフリップの終止が係数の下半連続性と昇鎖律の二予想に還元されている。そのどちらの系でもある、次元を固定したときの係数の上からの有界性を研究する。

3. 研究の方法

始めに有界性問題を Riemann-Roch の定理の観点から考察する。特異点に対し、その特異点解消上の標準因子 K 及び様々な豊富因子 H を考え、 $K+nH$ に付随する Euler 標数の挙動を Riemann-Roch の定理と消滅定理を用いて制御することで、 K に現れる極小対数的食違い係数の有界性を導く。

$K+nH$ の解析で直接得られるものは (不正確な表現ではあるが) $n=K/H$ の性質である。 K/H に対応する対象は極小対数的食違い係数を重複度で割った商で、それは対数的標準閾である。対数的標準閾はより扱い易い対象であって、有界性も自明である。そこからいかに重複度の影響を消去して極小対数的食違い係数の情報を引き出すかを考える。

幾何的な視点からは、曲線の錐の端射線の長さの主張の、極小対数的食違い係数の有界性との関連を考察する。また特異点解消写像は相対次元 0 の相対射であるから、Birkar, Cascini, Hacon, McKernan による最新の LMMP の理論を応用する。

一方、ジェット空間の視点からの特異点論を発展させる。Mustață らのモチーフ積分論

による極小対数的食違い係数の記述は、研究の余地があるからである。

4. 研究成果

(1) 極小対数的食違い係数の有界性問題は簡単に Gorenstein 端末特異点の場合に帰着される。まず Riemann-Roch 公式の第一項に重複度が現れることを用いて、係数の有界性が重複度あるいは埋込次元が抑えられる時に従うことを示した。次いで公式第二項に標準因子との交点数が現れることを用いて、超平面切断を繰返して得られる Gorenstein アルティン環を解析した。その結果として、Markushevich による 3次元の係数の有界性を復元し、さらに 3次元 Gorenstein 端末特異点の超平面切断が Du Val 特異点を持つと言う Reid の結果を、楕円特異点の性質を用いない簡単な方法で証明した。4次元特異点については、超平面切断が端末特異点の一つの性質を持つ場合に、係数の有界性を導いた。

(2) 次いで Kollár 及び de Fernex, Ein, Mustață による対数的標準性のイデアル進半連続性の拡張として、極小対数的食違い係数のイデアル進半連続性問題を研究した。問題は、境界因子を微小変形させるときの極小対数的食違い係数の不変性である。多様体が川又対数的端末特異点を持つ場合は、容易に対数的標準性の結果へ帰着できる。難しいのは真に対数的標準特異点を持ちながら正の極小対数的食違い係数を持つ場合であるが、極限を扱うときには避けられない。そこで手始めとして、純対数的端末特異点を持つ場合を考えた。一つの視点として逆同伴を経由すれば、川又対数的端末特異点の場合で、境界因子だけでなく多様体自身も微小変形させるときの問題でもある。この場合について、被約境界因子のヤコビアン の重複度が小さいことに着目し、モチーフ積分論を用いて係数のイデアル進半連続性を証明した。

さらに極小対数的食違い係数の昇鎖律についても考えた。対応する対数的標準閾の昇鎖律への Kollár 及び de Fernex, Ein, Mustață のアプローチに従って、多様体 (と境界の組) の列の極限、いわゆる generic limit を構成し、その極限の極小対数的食違い係数と元々の係数の成す列の関係を調べた。対数的標準閾についての諸結果への帰着が可能かを試行錯誤し、部分的な結果は得られたが、むしろ精密逆同伴予想のように、次元による帰納法を幾何的視点から定式化させるべきことが分かった。

(3) その他、昔の研究をもとに、因子を非 Gorenstein 特異点に収縮させる 3次元因子収縮写像はすべて 5次元商特異点内の重み付き爆発として記述されることを証明した。特異点版 Riemann–Roch 公式を用いて得られた写像の数値的分類から、写像に伴う次数付き環が決定できることによる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Masayuki Kawakita, Supplement to classification of threefold divisorial contractions, to appear in Nagoya Mathematical Journal **206** (2012), refereed
- ② Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies by Riemann–Roch theorem, American Journal of Mathematics **133** (2011), 1299–1311, refereed
DOI: 10.1353/ajm.2011.0037
- ③ 川北真之, Problems on singularities from the theory of minimal models, 第 54 回代数学シンポジウム報告集 (2009), 47–54, 査読無
http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp09_files/kawakita.pdf
- ④ Masayuki Kawakita, On a comparison of minimal log discrepancies in terms of motivic integration, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **620** (2008), 55–65, refereed
DOI: 10.1515/CRELLE.2008.048

[学会発表] (計 13 件)

- ① Masayuki Kawakita, Singularities in the minimal model program, “Algebraic versus analytic geometry”, Erwin Schrödinger International Institute, Austria, 9 December 2011
- ② Masayuki Kawakita, How to classify three-fold divisorial contractions, “Singularity theory and its extension”,

Kyoto University, Japan, 22 August 2011

- ③ Masayuki Kawakita, Ideal-adic semi-continuity problem for minimal log discrepancies, “MMP and extremal rays”, Kyoto University, Japan, 21 June 2011
- ④ 川北真之, Ideal-adic semi-continuity problem for minimal log discrepancies, 代数幾何学セミナー, University of Tokyo, Japan, 18 April 2011
- ⑤ Masayuki Kawakita, Singularities in the minimal model program, “5th Pacific Rim conference on mathematics”, Stanford University, USA, 1 July 2010
- ⑥ Masayuki Kawakita, On minimal log discrepancies, “Invariants in algebraic geometry”, University of Tokyo, Japan, 9 November 2009
- ⑦ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, Algebraic geometry seminar, University of Michigan, USA, 24 August 2009
- ⑧ 川北真之, Problems on singularities from the theory of minimal models, 第 54 回代数学シンポジウム, Meiji University, Japan, 3 August 2009
- ⑨ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, 1st Pacific Rim mathematical association congress, University of New South Wales, Australia, 10 July 2009
- ⑩ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, International conference “Geometry of algebraic varieties”, Steklov Mathematical Institute, Russia, 2 July 2009
- ⑪ 川北真之, Problems on singularities from the theory of minimal models, 大談話会, Kyoto University, Japan, 20 May 2009

⑫ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, Algebraic geometry seminar, University of Cambridge, UK, 28 January 2009

⑬ Masayuki Kawakita, Towards boundedness of minimal log discrepancies, Hayama symposium on complex analysis in several variables XII, Japan, 15 July 2008

[その他]

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~masayuki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川北 真之 (KAWAKITA MASAYUKI)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10378961

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し