

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 17 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2008 ～ 2011

課題番号：20684003

研究課題名（和文） 群作用付孤立超曲面特異点のホモロジー的ミラー対称性

研究課題名（英文） Homological Mirror Symmetry of Isolated Hypersurface Singularities
With Group Actions

研究代表者

高橋 篤史 (TAKAHASHI ATSUSHI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：50314290

研究成果の概要（和文）：ミラー対称性と呼ばれる代数学と幾何学の役割を入れ替える対称性のアイデアにより，特異点に対して代数学・表現論・幾何学に付随した 3 種類の三角圏が定義される．これらの三角圏の性質に着目することにより，「アーノルドの奇妙な双対性」と呼ばれる特異点の双対性が，尖点付きリーマン面と群作用付きカusp特異点の間に存在するミラー対称性として自然に説明され，無限個の特異点に一般化されることを示した．

研究成果の概要（英文）：Based on the idea of the Mirror symmetry which interchanges the role of the algebra and the geometry, three kinds of triangulated categories are associated to the algebra, the representation theory and the geometry. Looking at some properties of these triangulated categories, we show that the “Arnold’s strange duality” is now naturally understood as a mirror symmetry between orbifold curves and cusp singularities with group action, which is generalized to an infinite series of singularities.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2009 年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2010 年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2011 年度	3,000,000	900,000	3,900,000
年度			
総計	13,000,000	3,900,000	16,900,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学，代数学，数理物理学，ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性とは，リーマン面から多様体への正則写像の数え上げに対応する A 模型と複素多様体の変形理論に対応する B 模型という，2 つの位相的弦理論の等価性のことである．ミラー対称性は多様体の定性的および定量的な性質に関するさまざまな予想を与え，これまで個別に研究されてきた数学を結び付けるので極めて興味深い．

群作用付孤立超曲面特異点のミラー対称性は，7,555 個の位相的ミラー対をなすカラビーヤウ多様体の発見をもたらした．最近，堀氏・Orlov 氏・研究代表者らにより，80 年代中旬の特異点理論における行列因子化のアイデアで，その理解が急速に進んでいる．

離散群・特異点・ルート系・リー環・有限次元代数の間にある不思議な関係を解明するため，ホモロジー的ミラー対称性の観点

から、群作用付き行列因子化の圏およびその安定性条件の空間の構造解明を目指し、研究を行ってきた。

これまでの研究において、群作用付き超曲面特異点に対するホモロジー的ミラー対称性予想の定式化および予想成立の状況証拠を与えていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散群・特異点・ルート系・リー環・有限次元代数の間にある不思議な関係を解明するため、ホモロジー的ミラー対称性の観点から、群作用付孤立超曲面特異点に対して、それぞれ代数学・表現論・幾何学に付随した3種類の異なる背景を持つ三角圏の圏同値に着目することにより、特異点の持つ代数的・幾何学的性質を解析することである。

3. 研究の方法

上記の研究目的を達成するため、以下の方法で研究を行った。

(1) 群作用付き行列因子化の圏の構造解明を目的とし、「良い full strongly exceptional collection」の存在証明およびその特徴づけを目標に研究を遂行する。

(2) ホモロジー的ミラー対称性の存在を示す証拠として、対応する三角圏が full strongly exceptional collection を持つような、群作用付き特異点を系統的に発見することを目標として研究を遂行する。

(3) 行列因子化の計算や Orlov 氏による半直交分解の理論に基づき、「良い full strongly exceptional collection」の特徴づけを目指して研究を遂行する。

これらの内容を効率的に遂行するため、国内外の関連分野の研究集会に積極的に参加した。また、関連する国内・海外研究者の招へいを通じて研究交流を行った。

さらに、自らも研究集会を開催し、当該分野の最新の進展について、参加者がそれぞれの研究成果を発表し、活発な議論を行う機会を設けた。

4. 研究成果

上記の研究方法により、以下のような研究成果を得た。

(1) Cohen-Macaulay 加群（代数学側）の三角圏と有限次元結合代数（表現論側）の三角圏という、似ていると思われていたが個別に研究されてきた理論を、ミラー対称性に基づく三角圏同値によって明確に関連付けた。

とくに、消滅サイクルのなす深谷三角圏（幾何学側）のみたすべき性質と比較することにより、代数側の三角圏が特別な生成対象を持つことを一般的に予想として与え、ある無限系列の群作用付孤立超曲面特異点に対して、その証明を与えた。

(2) 群作用付きの「カusp特異点」と滑らかな射影曲線を粗なモジュライ空間としてもつオービフォールドのホモロジー的ミラー対称性予想を定式化した。

とくに、オービフォールドの粗なモジュライ空間が射影直線である場合に詳細な研究を行った。カusp特異点が曲線特異点に帰着される場合について、特異点理論における古典的手法を用いることにより、ホモロジー的ミラー対称性予想を証明した。

(3) 群作用付きの「カusp特異点」と滑らかな射影曲線を粗なモジュライ空間としてもつオービフォールドのホモロジー的ミラー対称性予想の一般的な場合について、その組み合わせ論的側面に関する命題を証明することができた。

具体的には、群作用付孤立超曲面特異点に対して、「ドルガチェフ数」と「ガブリエロフ数」を定義することができ、それらが超曲面特異点の「転置」操作により入れ替わる、ということを証明した。これにより、「アーノルドの奇妙な双対性」は完全な形で拡張され、それはミラー対称性によりもはや「奇妙でなく」自然に説明することができるようになった。

とくに、クラインの研究に起源を持ち100年以上にわたって多くの研究者によって研究されてきた、正多面体・ADE 特異点・有限次元単純リー環の間にある不思議な関係も、この結果によりミラー対称性の一つとして自然に説明されることとなった。

(4) ホモロジー的ミラー対称性によってミ

ラー対であることが期待される単純楕円型特異点とオービフォールドの対に対して, 平坦構造をそれぞれ原始形式とグロモフ - ウィッテン不変量の理論から構成し, その同型写像を構成した. これは, このミラー対に対して古典的な意味でのミラー対称性を証明したことになる.

この帰結として, グロモフ - ウィッテン不変量の母関数が収束し, 保型性を持つことが示された.

また, E6 型の単純楕円型特異点に付随するエータ積のフーリエ係数がグロモフ - ウィッテン不変量という幾何学的意味づけを持つことが同時に証明された.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① W. Ebeling and A. Takahashi, Mirror Symmetry between Orbifold curves and Cusp Singularities with Group action, Int. Math. Res. Notices, doi: 10.1093/imrn/rns115, (巻・最初と最後の頁は未定), (2012), 査読有.
- ② W. Ebeling and A. Takahashi, Strange duality of weighted homogeneous polynomials, Compositio Math., 147, 1413 – 1433, (2011) 査読有.
- ③ A. Takahashi, Weighted projective lines associated to regular systems of weights of dual type, Advanced Studies in Pure Mathematics, 59, 371 – 388, (2010), 査読有.
- ④ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Cusp Singularities, Obelwolfach Reports, 6-3, 1787 – 1789, (2010), 査読無.
- ⑤ A. Takahashi, Triangulated categories for isolated hypersurface singularities and mirror symmetry, 第 31 回可換環論シンポジウム報告集, 巻なし, 136-143, (2010), 査読無.
- ⑥ H. Kajiura, K. Saito and A. Takahashi, Categories of Graded Matrix Factorizations for Regular Systems of Weights with $e=-1$, Advances in Mathematics, 220, 1602 – 1654, (2009),

査読有.

- ⑦ K. Saito and A. Takahashi, From Primitive Forms to Frobenius Manifolds, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 78, 31 - 48, (2008), 査読有.
- ⑧ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Singularities, 2008 代数幾何学シンポジウム記録, 巻なし, 98 – 101, (2008), 査読無.

[学会発表] (計 31 件)

- ① A. Takahashi, Mirror symmetry of orbifold projective lines, Workshop on integrable systems and mirror symmetry, 2012 年 2 月 23 日, 神戸大学.
- ② A. Takahashi, Mirror symmetry of weighted projective lines, Hong Kong Geometry Colloquium, 2012 年 1 月 14 日, 香港科学技術大学.
- ③ A. Takahashi, Matrix Factorizations Orbifold Curves and Mirror Symmetry, 第 44 回環論および表現論シンポジウム, 2011 年 9 月 27 日, 岡山大学.
- ④ A. Takahashi, Mirror symmetry between orbifold curves and cusp singularities with group action, The 6th Franco-Japanese Symposium on Singularities “Singularities in Geometry and Topology”, 2011 年 9 月 9 日, 九州大学.
- ⑤ A. Takahashi, Mirror symmetry between orbifold curves and cusp singularities with group action, Workshop on Matrix Factorizations, 2011 年 5 月 8 日, Universitaet Bielefeld (Bielefeld, Germany).
- ⑥ A. Takahashi, Mirror symmetry for weighted homogeneous polynomials, Derived Category Tokyo 2011, 2011 年 1 月 28 日, 東京大学.
- ⑦ A. Takahashi, Mirror symmetry for weighted homogeneous polynomials, Test Problems for the theory of finite dimensional algebras, 2010 年 10 月 14 日, Banff International Research Station (Banff, Canada).

- ⑧ A. Takahashi, Mirror Symmetry and Strange duality for weighted homogeneous polynomials, 第 55 回代数数学シンポジウム, 2010 年 8 月 10 日, 北海道大学.
- ⑨ A. Takahashi, Strange duality of weighted homogeneous polynomials, Workshop on Geometry and Physics of Landau-Ginzburg model, 2010 年 6 月 1 日, Institut Fourier (Grenoble, France).
- ⑩ A. Takahashi, Strange duality of weighted homogeneous polynomials, Interplay between Representation theory and Geometry, 2010 年 5 月 4 日, 精華大学 (北京, 中国).
- ⑪ A. Takahashi, Gromov-Witten invariants for weighted projective lines mirror dual to simple elliptic singularities, Workshop "Mirror Symmetry and Gromov-Witten Theory", 2010 年 1 月 14 日, Seoul National University (ソウル, 韓国).
- ⑫ A. Takahashi, Triangulated categories for isolated hypersurface singularities and mirror symmetry, 可換環論シンポジウム, 2009 年 11 月 27 日, ホテルアウイーナ大阪.
- ⑬ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Cusp Singularities, Singularities, 2009 年 9 月 25 日, Mathematisches Forschungsinstitut Obelwolfach (Obelwolfach, Germany).
- ⑭ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry of Singularities" 4th Pacific Rim Conference in Complex and Symplectic Geometry, 2009 年 8 月 2 日, Sichuan University, (成都, 中国).
- ⑮ A. Takahashi, Mirror Symmetry of Singularities, 代数的三角圏とその周辺, 2009 年 7 月 24 日, 京都大学.
- ⑯ A. Takahashi, Mirror Symmetry of Cusp Singularities, Kobe Workshop on Geometry of Moduli Spaces, 2009 年 7 月 21 日, 神戸大学.
- ⑰ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Cusp Singularities, Workshop on Homological Mirror Symmetry and Related Topics, 2009 年

1 月 23 日, University of Miami (Miami, USA).

- ⑱ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Singularities, 代数幾何学シンポジウム, 2008 年 10 月 23 日, 兵庫県立城崎大会議館.
- ⑲ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Hypersurface Singularities, GEOMETRY OF SINGULARITIES AND MANIFOLDS--KUSATSU 2008--, 2008 年 9 月 15 日, 草津温泉セミナーハウス.
- ⑳ A. Takahashi, Homological Mirror Symmetry for Isolated Hypersurface Singularities, Workshop on Homological Mirror Symmetry and Symplectic Geometry, 2008 年 5 月 27 日, MIT (Cambridge, USA).

〔図書〕 (計 1 件)

- ① 江口徹・深谷賢治・高橋篤史・並河良典・細野忍・今野宏・マーティンゲスト・乙藤隆史・中島啓, 日本評論社, ミラー対称性入門, 2009 年, 33-45, 60-70, 137-148.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 篤史 (TAKAHASHI ATSUSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50314290