

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 16日現在

機関番号：32651

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008 ～ 2011

課題番号：20730147

研究課題名（和文） 金融資産の収益率過程に従属性がある場合の最適ポートフォリオの統計的推定

研究課題名（英文） Statistical Estimation of Optimal Portfolios for Dependent Returns of Assets

研究代表者

白石 博（SHIRAIISHI HIROSHI）

東京慈恵会医科大学・医学部・講師

研究者番号：90454024

研究成果の概要（和文）：

(1) 金融資産の収益率過程が ARMA-GARCH 過程および非定常過程のクラスである time-varying ARCH 過程に従う場合に、適切なリサンプリング（ブートストラップ）手法を提案し、これらを用いた最適ポートフォリオ推定量を提案した。また、その推定量の漸近的性質を解明した。さらには、経験データを用いてこの手法の実用可能性を検証した。

(2) 平均・分散最適化ポートフォリオ以外の各種ポートフォリオの調査およびその推定量の漸近的性質を調査した。特に、下方積率を最適化する“Pessimistic Portfolio”などの調査や、離散時間モデルにおける多期間問題の最適化アルゴリズムを提案した。また、年金保険における ALM（資産負債管理）の手法を提案した。

研究成果の概要（英文）：

(1) When the financial returns are the ARMA-GARCH process or the time-varying ARCH process, proper resampling (bootstrap) procedures and the optimal portfolio weight estimators are proposed. Moreover, the asymptotic property of these estimators are investigated. Furthermore, the practical use possibility of these techniques are verified using experience data.

(2) Various portfolios other than mean-variance portfolio and the asymptotic property of these estimators are investigated. Especially, investigation of "Pessimistic Portfolio" which optimize the lower partial moment accomplished. Moreover the optimization algorithm in the multi-period problem under a discrete time model and a procedure of ALM (asset and liability management) in pension insurance are proposed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：経済学・経済統計学

キーワード：計量経済学

## 1. 研究開始当初の背景

ポートフォリオ理論では、過去の資産価格データを用いて、資産から得られる期待収益率と、期待通りに収益が得られるかどうか投資の危険度を示すリスクのトレードオフ関係が分析される。先行文献では資産の収益率過程が i. i. d. (独立同一分布) に従うと仮定し、期待収益率およびリスクの推定量をそれぞれ観測系列の標本平均および標本分散で表して最適ポートフォリオを統計的に推定するものが殆どである。一方で、金融時系列の経験データを見ると、収益率過程は非正規あるいは非定常過程であることが知られており、この状況下では過去提案されている最適ポートフォリオ推定量は、漸近最適 (有効) 性の観点から問題を抱えている。

報告者は、まず収益率過程が正規定常過程のとき、過去提案されてきた最適ポートフォリオ推定量の漸近正規性を導き、さらに漸近有効になるための必要十分条件を調べた。この結果から収益率過程が VARMA(p, q) 過程 (ただし、 $p < q$ ) や指数型スペクトル密度行列をもつときは、従来の最適ポートフォリオ推定量は漸近有効でないということが判明した。これは収益率過程が正規であっても従属性の構造が入ると従来の推定量は必ずしも漸近有効性をもたないということを意味し、従来の金融解析への重要な警告を得た。

次に、収益率過程が非正規定常過程のとき、従来の最適ポートフォリオ推定量の漸近正規性を導き、さらにこの漸近分散が非正規性の影響を受けることを調べた。

また、収益率過程が定常であるという仮定も、実際の金融データではきつい制約となる。そこで、報告者は、収益率過程が重要な非定常過程の1つのクラスである、局所定常過程のとき、最適ポートフォリオ推定量の漸近有効性を、非母数的・母数的推定の両面で調べた。非母数的推定としては、推定量の平均二乗誤差を最小にする最適なカーネル関数とバンド幅を導いた。非母数的推定はモデルを特定する必要がないため、有用な推定手法の1つとして注目されているが、どのようなバンド幅およびカーネル関数を選択するかが重要な課題となる。以上の結果はこの観点から有用に思われる。また、母数的推定として

は、収益率過程が局所漸近正規性 (LAN 性) を持つことを導き、この性質から漸近有効な推定量を擬似最尤推定量を使って構成できることを導いた。この結果は、実際の金融データに想定できる極めて自然な条件の下で漸近最適 (有効) な推定量を構成可能であることを意味し、従来のポートフォリオ理論の統計的推測論に大きく貢献していると思われる。

さらに、報告者は、非正規収益率過程に対して一般的な効用関数を想定して、最適ポートフォリオ係数を表す関数  $g$  が収益率過程の3次のキュムラントに依存する場合の推定量を提案し、非正規の場合に従来の推定量との比較を行った。その結果、高次のキュムラントがこれらの推定量の良さに大きな影響を与えることを示すことが出来た。

上記の一連の研究は、資産の収益率過程が分かっている前提の議論であり、漸近的見地から最良のポートフォリオ推定量を調べるものである。実際には投資家は、各資産の過去の実績から収益率過程を予測し、最適ポートフォリオ推定量を構成する。つまり、構成された最適ポートフォリオ推定量は、収益率過程の予測による誤差と、推定量と真の値との誤差という2重の誤差に留意する必要がある。

## 2. 研究の目的

(1) 近年、特に機関投資家は、資産運用に係るリスクを計量的に測定することに注目していることが知られている。本研究は、このポートフォリオ推定の誤差を測るためのツールの1つであるリサンプリングについて、従属性を考慮した上での適切な活用方法を提案する。リサンプリング法とは、得られた経験データからのサンプリングによってバラツキを評価する統計手法であるが、この手法を使ってポートフォリオ選択における誤差の影響を調べるのに活用できることが注目されている。しかし、リサンプリングは、i. i. d. (独立同一分布) のもとで得られた経験データの無作為抽出を前提としており、従属性のある収益率過程への適用には注意が必要である。本研究では、第1段階として、収益率過程が非正規定常過程に従う場合の

適切なリサンプリング手法を提案し、これを局所定常過程等の特殊な確率過程に従う場合に拡張する。

(2) 先行研究において、報告者はポートフォリオの最適化関数として、平均-分散モデルを前提として考えていた。しかし、近年、平均-分散モデルの他に多数のポートフォリオ選択モデルが提案されている。これらのモデルを適用した場合の推定量の提案およびその漸近的性質の調査も試みる。また、上記の研究はすべて1期間問題に帰着されるが、実務的には多期間問題を考えた方が実態に即している。この分野の研究は、問題の複雑さからそれほど多くの研究がなされていないのが実態である。しかし、近年、コンピュータの性能の向上により、シミュレーションを用いた多期間問題の解決法が提案されている。この分野における最適化問題についても調査し、従属性を考慮した上での最適化手法を提案する。

### 3. 研究の方法

(1) リサンプル（ブートストラップ）についての一般的な手法および効果について研究し、従属性のある確率過程への適用に関する問題点およびその解決方法について研究した。具体的には、Lahiri (2003)等の先行文献を調査し、リサンプル法を時系列過程へ適用する為の道具を調べた。幾つかの先行文献において、リサンプルを時系列過程へ適用しているが、これをポートフォリオ推定に適用させるためには、工夫が必要となる。最終的には、収益率過程が、VAR(p)過程や VARMA(p, q)過程のような線型（非正規）定常過程、VARCH過程のような非線型（非正規）定常過程、さらには、Dahlhaus and Rao(2006)が提案した time varying ARCH過程にそれぞれ従う場合のリサンプル手法および最適ポートフォリオ推定量を提案し、その漸近的性質を明らかにする。また、当研究は金融時系列データに対する最適リサンプル法の提案を目的としているので、実データによるシミュレーションを行い、理論の正当性を調べた。ポートフォリオ理論では、複数の金融資産の価格データを使って最適ポートフォリオを構成するが、金融機関等の実務部門では、かなりの数の金融資産を使って最適ポートフォリオを構成する。さらに、本研究ではこれを時系列で解析する必要があるため、膨大な計算量を要する。効率的なアルゴリズムを考え、計算プログラムの簡素化を図るために、統計ソフトやプログラムの関連図書を参考にした。

(2) ポートフォリオ最適化問題については、近年、分散ではないリスク尺度を用いたモデルである下方リスクやトラッキング・エラー最小化モデルなどが開発されている。また、「現在」と「将来のある1時点」のみを考える従来の1期間モデルを拡張した「現在」と「複数の将来時点」までの複数期間をモデルの中で明示的に考慮した多期間ポートフォリオ最適化モデルや、「負債のキャッシュ・フロー」も考慮した資産配分問題である ALMモデル等についても漸近有効ポートフォリオを構成できることを試みる。また、近年、市場平均並みのパフォーマンスを目指すパッシブ運用ではなく、これを上回るパフォーマンスを目指すアクティブ運用が注目されている。アクティブ運用を行う為には、機動的にアセット・クラスの配分比率をアクティブに変更する必要があるが、これをシステムティックを行うためには、ポートフォリオを時間依存する関数と見なした上で漸近有効な推定量を構成する必要があると考えられる。

これらの得られた研究成果を学会等で発表し、また、国内外の研究者と交流し、さらに研究を進めた。

### 4. 研究成果

(1) について、まず金融資産の収益率過程が線型性と非線形性が混在する ARMA-GARCH過程に従う場合のリサンプリング手法を提案し、これらを用いた最適ポートフォリオ推定量を提案した。収益率が ARMA-GARCH過程に従うと仮定し、オーダーが既知の場合と未知の場合で、リサンプリングを使って Value at Risk (VaR) 有効ポートフォリオ推定量を提案した。オーダーが既知の場合、正規擬似最尤推定量(GQMLE)を使って誤差推定量を構成し、1時点先の収益率を複製する。GQMLEの漸近正規性より、複製した収益率と真の収益率の分布関数の一致性が得られた。またオーダーが未知の場合、正則条件の下で収益率過程を  $AR(\infty)$ -ARCH( $\infty$ )表現し、ベイジアン情報量基準(BIC)を使って  $AR(p)$ -ARCH( $q$ )過程で近似する。これを使って誤差推定量を構成し、同様に1時点先の収益率を複製する。最終的に複製した収益率を使って VaR の推定量を構成し、これを最適にするポートフォリオとして VaR 有効ポートフォリオ推定量を提案した。

つぎに、非定常過程のクラスである time varying ARCH過程に従う場合のリサンプリング手法を提案し、これらを用いた最適ポートフォリオ推定量を提案した。時間毎に係数が

緩やかに変動する ARCH 過程 (tvARCH process) を仮定し、リサンプリングを使った平均分散最適ポートフォリオ推定量を提案した。観測系列を使って局所的な擬似最尤推定量を構成し、これらから i. i. d. の誤差の推定量を構成する。誤差推定量の経験分布から誤差を複製し、それを使って収益率を複製する。複製された収益率を使って、再度局所的な擬似最尤推定量を構成する。この擬似最尤推定量は真の母数の一致推定量であり、漸近正規性を持つ事が示された。平均分散最適ポートフォリオは、この観測系列の最終時点の母数の関数であると考え、擬似最尤推定量の関数で最適ポートフォリオを定義し、その漸近正規性を示した。

当研究を行うに際し、重要となる点として次の3点が挙げられる。

①現実の収益率過程を想定した適切なリサンプリング手法の提案

②リサンプリングされたデータを使って、ポートフォリオ選択における誤差を評価する指標の提案

③実際の資産運用への適用

①については、収益率過程は従属性がありかつ非正規性を持つことが先行論文より知られているため、非正規の VAR 過程および VGARCH 過程における適切なリサンプリング手法を提案した。現実にかなり近いモデルでの適切なリサンプリング手法が提案できたことで、金融市場への貢献度は高いものと思われる。

②については、リサンプリングを使ってポートフォリオ推定量の信頼区間が構成可能であることを導いた。推定誤差を数値で評価できることにより、より高度なリスク評価分析が可能となるものと思われる。

③については、②で構成した信頼区間を使って、Value at Risk Efficient Portfolio が構成できることを導いた。さらに、過去の為替レートを使って、VAR 過程および VGARCH 過程を仮定してリサンプリングを行い、ポートフォリオ推定量の信頼区間および Value at Risk Efficient Portfolio を計算した。これにより、信頼区間を実際の資産運用に連動させることが可能となり、投資家が目標とするターゲットに連動した資産運用が可能となるものと思われる。

また、上記の結果を、国内外の学会およびシンポジウムで報告し、議論したことにより、現在直面している当研究に関連する金融・統計分野での問題点を見つける事ができた。

上記のリサンプリング (ブートストラップ) 法はパラメトリックな手法だが、ブート

ストラップ法本来の利点は、モデルを仮定する必要の無い事であるため、パラメトリック以外の手法についての調査も同時に行った。パラメトリックな手法とは、モデルを仮定しパラメータの推定量をプラグインし、residual を複製するという手法であるため、モデルの特定化を誤るという危険性がある。一方、ノンパラメトリックまたはセミパラメトリックな手法として、Block Bootstrap, Wild Bootstrap または Frequency Domain Bootstrap が提案されているが、適用可能な確率過程に注意する必要がある。Goncalves and Kilian は、(条件なしの) 異分散モデルに対して考えられていた Wild Bootstrap を ARCH や GARCH などの非線形モデルにも適用可能であることを証明した。また、Nordman and Lahiri は、長期記憶過程に関して、Block Bootstrap, Frequency Domain Bootstrap が適用可能であることを示している。この分野についての研究は、現時点では各種ブートストラップ手法と適用可能な確率過程に関する調査に留まったが、今後は広いクラスに関する最適なブートストラップを提案したい。また、ポートフォリオ推定に対する最適なブートストラップ手法は何であるかは今後の課題としたい。ブートストラップ手法の優劣を決めるためには、Edgeworth 展開などの確率展開を考える必要があると思われるが、これについても今後の課題としたい。

(2) については、従来の最適ポートフォリオは、マルコウィッツによって提案された平均・分散最適化ポートフォリオであったが、分散では裾の重さを表現することが困難なことから、近年、リスクの部分分散 (または標準偏差) の代わりに value at risk や lower partial moment を使って評価する手法が注目されている。これらの最適ポートフォリオを考えるためには、リスクの推定量を構成する必要があり、従属性のある収益率過程に対するブートストラップ手法を用いてこれらリスクの推定量を構成し、最適ポートフォリオ推定量を提案した。また、Bassett et.al. (2004) によって提案された “Pessimistic Portfolio” は、Conditional Value at Risk や Expected shortfall と呼ばれている下方積率を最適化するポートフォリオであり、近年最も注目されているポートフォリオの1つであると思われる。このポートフォリオの推定量は、Quantile Regression を用いて構築できるが、Tanai and Shiohama (2012) は、その漸近有効な推定量が構成できることを示した。

多期間問題については、報告者は、VAR (p)

過程に従う場合のブートストラップを用いた最適解の導出方法を提案した。連続時間モデルについての多期間問題については、確率微分方程式を用いて、多数の研究がされているが、離散時間モデルに関する研究は、特別な場合を除いては明示的な解が得られないため、先行研究はあまりなされていない。しかし、近年、コンピューターの性能の向上により、シミュレーションを使った解決方法が Ait-Sahalia and Brandt (2001) などによって提案されている。報告者は、資産の収益率過程が VAR 過程に従うと仮定し、T 期先の富の期待効用を最適化する（ブートストラップ法を用いた）アルゴリズムを提案した。

また、厚生年金のような年金保険の資産運用を想定し、負債が時間の関数で与えられるような場合の資産運用について、T 期先の富の期待効用を最適化するアルゴリズムをブートストラップ法を用いて提案した。

最後に、本研究の総括として、1. 各種最適ポートフォリオ推定量の調査 2. その漸近理論の調査ならびに漸近有効な推定量の調査 についてのまとめを行った。

まず 1. については、従来の平均分散最適ポートフォリオの中にも、平均または分散を固定して分散または平均を最適化するモデル、シャープ比を最適化するモデル、市場価格指数等を利用した CAPM やファクターモデルを最適化するモデルがあることが分かった。また、それ以外にも、期待効用最大化問題として、HARA、CARA、CRRA 最適化モデル、平均分散歪度最適化モデル、平均絶対偏差最適化モデルおよび近年注目されている  $\alpha$  リスク最適化モデル (Pessimistic Portfolio) など多数のモデルが存在することが分かった。また、これらの全てのモデルは、ある関数の期待値を最適化することで解を得る事ができ、これらの最適ポートフォリオ推定量は、“Z-estimator”または“M-estimator”のクラスに該当することが分かった。具体的には、ポートフォリオ係数をパラメータとして各種効用関数の期待値を考え、それを最大化 (M-estimator) またはその導関数を 0 (Z-estimator) にする解を最適ポートフォリオ係数とし、そのサンプルバージョンを推定量とすればよいと考えられる。

また、2. について、“Z-estimator”または“M-estimator”の漸近論については、van der Vaart (1998) や Kosorok (2008) などに一般論は記載されており、本研究のようなセミパラメトリックの設定での漸近有効性の議論もある。特に本研究では、収益率過程に従

属性がある場合を考えており、この場合は“条件付”期待効用を考える必要がある。このようなモデルに対して、サンプルバージョンを作るためには、bootstrap, marked empirical process, smoothing function などの手法を利用する必要があることが分かった。これらの先行文献により、一般論としての最適ポートフォリオ推定量の漸近分布が記述できることが分かったが、具体的なケースについての理論は構築できていないため、今後の課題としたい。

バブル崩壊に続く株式市場の低迷、空前の低金利時代の到来、円高の進行等、わが国の機関投資家は、かつて無い運用難に直面している。このような状況のもとで証券運用に対する社会的な関心も、かつてないほどの高まりを見せている。本研究は、近年実務部門等で特に関心の高い、シミュレーションによるリスク管理分析を行う際の重要な手法として貢献するものと考えられる。

研究分野としてのファイナンス工学を実務部門である金融界において確立するためには、研究のもたらす利益を実務家に継続的に提示することが必要であると思われる。本研究は、この点からも研究意義を満たしていると考えられる。つまり、本研究を行うことにより、現実の環境に極めて近い状況下で、構成したポートフォリオの誤差を計量的に測ることにより、社会的関心の高い資産運用におけるリスク管理分析が可能となると予想される。

前述のとおり、ポートフォリオ理論では、資産の収益率過程が i. i. d. (独立同一分布) に従うと仮定して議論をしている先行文献が殆どであり、また、リサンプリング法の金融工学に適用することも極めて最近のトピックである。したがって、収益率過程に従属性を仮定した上でのリサンプリング法を使ったポートフォリオ理論の構築は極めて独創的であり、かつ社会的貢献も高いものと考えられる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

① Hiroshi Shiraishi, RESAMPLING PROCEDURE IN ESTIMATION OF OPTIMAL PORTFOLIOS FOR TIME-VARYING ARCH PROCESSES, To appear in *Scientiae Mathematicae Japonicae*

② Hiroshi Shiraishi, A Simulation Approach to Statistical Estimation of Multiperiod Optimal Portfolios, To appear in Advances in Decision Sciences

③ Hiroshi Shiraishi, Optimal Portfolios with End-of-Period Target, Advances in Decision Sciences, 査読有, Volume 2012, 2012,  
DOI: 10.1155/2012/703465

④ Hiroshi Shiraishi, Resampling procedure to construct estimation error efficient portfolios for stationary returns of assets, Journal of the Japan Statistical Society, 査読有, 40, 2010, 189-206

⑤ Hiroshi Shiraishi and Masanobu Taniguchi, Statistical estimation of optimal portfolios depending on higher order cumulants, Annales del' I. S. U. P., 査読有, 53, 2009, 3-18

⑥ Hiroshi Shiraishi and Masanobu Taniguchi, Statistical estimation of optimal portfolios for non-Gaussian dependent returns of assets, Journal of Forecasting, 査読有, 27, 2008, 193-215

[学会発表] (計 3 件)

① 白石博, Resampling procedure to construct Value at Risk efficient portfolio for ARMA-GARCH returns of assets, 日本数学会, 2009 年 3 月 28 日, 東京

② 白石博, Statistical estimation of optimal portfolios for Dependent Returns of Assets, 日本数学会, 2008 年 9 月 24 日, 東京

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

白石 博 (SHIRAIISHI HIROSHI)  
東京慈恵会医科大学・医学部・講師  
研究者番号 : 90454024