

機関番号：13902

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20730552

研究課題名 (和文) 図形・空間の授業構成に関する認識論的研究

研究課題名 (英文) AN EPISTEMOLOGICAL STUDY OF DEVELOPMENT OF LESSONS ABOUT LEARNING  
FIGURE AND SPACE

研究代表者

影山 和也 (KAGEYAMA KAZUYA)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：60432283

研究成果の概要 (和文)：数学授業は社会的営みであり，生徒は他者への正当化を通して自らの知識を作り上げていく。図形・空間の学習にまつわる授業では，それらについての知識は正当化のための道具になりうる。自らにとって有用な知識を生徒に構成させるためには，数学的活動の場を設定することが重要である。図形の敷き詰め課題はそうした活動の場の例である。授業実践の結果，目的意識を持って活動する生徒は，教師に教えられずとも自らで図形にまつわる高次の知識を構成していくことが明らかとなった。

研究成果の概要 (英文)：Mathematical lesson is a social activity and students construct their own knowledge through justification to others under the situation of validation. In the lesson about figure and space the knowledge about them can be one of instruments for justifying to others. To let students construct useful knowledge for themselves it is important to set situations of mathematical activity. The task about tessellation of figures is one of examples of such a situation. The result of designing and practicing lessons was that students might construct higher ordered knowledge according to their object without being taught by teacher.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	400,000	120,000	520,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：数学教育，認識論，図形学習，授業構成

## 1. 研究開始当初の背景

(1)算数・数学教育において，図形・空間の学習を題材として，個々の生徒の認知的活動を記述する実証的研究は数多くなされてきている。また，図形・空間の学習材にまつわる生徒の望ましいもしくは期待される考え方を何らかの枠組みによって表し，それによって生徒の実態を調べる研究もなされている。これらの成果は単元レベルでのカリキュラ

ム構成や具体的な授業提案としてまとめられている。

(2)これらの研究は，実際の授業を観察し，生徒のありのままの振る舞いを認識論的に分析するというものではなく，知識の本性を考慮した授業提案を行っているわけではない。ここでいう知識の本性とは，知識は個々によって多様であり，それ自体で全体性を持つこ

とや、公的に認められ共有されたとされていても、なお私的に意味づける部分があるという両面性を持つことなどである。

(3)上記と関連して、生徒に全体としてまとまりのある知識を構成させるための、複数の節や単元をまたいで一貫させた授業提案は少ない。授業は何らかの知識を構成する場、数学教育の核心を知識構成に関する認識論に求めるならば、こうした状況を反省する必要がある。

## 2. 研究の目的

(1) フランスでの数学教授学における焦点のひとつは、授業での知識の構成と普及にある。こうしたことから、フランスでの数学教授学を始めとする国内外の数学教育学研究が、知識をどのように捉えているかを整理・検討し、授業の分析と後の授業構成のための認識論的基盤とすることが第一の目的である。

(2)図形・空間の学習では、モノの見方に関わる認知的研究がなされてきている。多様な研究方法による図形・空間認知にまつわる先行研究を整理・検討し、各々の研究パラダイムからみたとときの図形・空間学習への示唆を得たり、授業構成のための原理としての限界を明確にしたりすることを第二の目的とする。

(3)種々の国際比較研究や国内の数学教育研究の成果を踏まえ、今後注目され重視されるべき知識観について述べ、数学授業を設計・提案するための原理をあげることを第三の目的とする。特に、「知識」には、公的に知られている側面と、私的に知るという知り方に関する側面とがあり、日本で両者がないまぜになっていることが、知識志向の授業構成がなされない要因であると考えられる。

(4)以上のことを踏まえて、実証的方法によって、日本における図形・空間の授業構成論を提起することを最終的な目的とする。

## 3. 研究の方法

目的(1)~(3)における認識論的考察のために、文献解釈を中心とした理論的方法と、授業観察から得られるデータの質的分析による実証的方法とを併用する。特に目的(4)では、現場教員との協同によって具体的な授業を設計し、実践を行う。

## 4. 研究成果

以下では、研究目的(1)~(4)に概ね対応させる形で研究成果を述べる。

(1)数学授業を社会的営みと見なした場合、そこには私的および公的知識が共存している

ことや、知識の持つ性格も刻々と変化することを質的分析によって明らかにした。たとえば、問題解決のために作りだしたアイデアや用いた知識は、あるときには考察のための道具となり、またあるときには他者に対して正当化するための根拠となるといった具合である。これは、かねてより様々に述べられてきた数学的知識の道具的性格というよりも、フランス数学教授学での「道具-対象」の弁証法的性格というべきものであり、授業の状況に応じて、生徒によって知識に対してなされる様々の意味づけは柔軟になされることを示している。

(2)認識論とは知識についての理論であり、それは「正しさの正当化」に大きく関わる。目的(1)で検討したように、フランス数学教授学においても、理想的な数学授業には、理由付けに関する妥当化の状況という段階が現れるとされる。また、図形の学習においては、記号的表現と比較して既約性の比較的少ない図のモデルが頻繁に登場する。これは分かりやすさの点で授業中の交流を潤滑にするものの、反面、その見た目の印象によって後の一般性や厳密性を志向する数学的議論を阻害する恐れがある。

以上のことから、「正当化」をキーワードとして、縦軸として心理的-数学的、横軸として個人的-社会的を据えた2つの軸からなる枠組みによって、授業における生徒の活動を記述するための、生徒の理由付けにみられる「多様な合理性」としてまとめた(表1)。

表1. 多様な合理性を捉える枠組み

	内主観	間主観
個人	<u>行為の状況</u> ・知覚的、発見法 ・直観的 ・内面化された儀式	<u>定式化の状況</u> ・儀式、権威 ・コミュニケーションにおける言葉の意味の構成と変容
非個人	<u>自己への正当化</u> <u>定式化の状況</u> ・算数的 ・経験的	<u>他者への正当化</u> <u>妥当化の状況</u> ・算数的 ・演繹的

このうち前者の「心理的」「個人的」性格とは、主として図形・空間認知にまつわる先行研究の解釈と検討から得られたもので、与えられた図の直観的見方にまつわる認知的傾向にあたるものである。この枠組みによれば、当初は私的であった生徒個々の知識が、自己への正当化を通じ、他者への正当化を通して徐々に公的性格を帯びていき、かつ授業の参加者が納得できるという意味での数学的知識へと変容するような、いくつかの道筋や段階が存在することが指摘されうる。また、こ

の枠組みの示唆することとして、第三者からすれば合理的ではなくとも、個人の内では合理的だと見なされるような活動が見られるということである。後に述べるような、正当化の道具として数学を捉えるようになるとき、個人の域を超えた妥当性の価値を感得するようになる。

(3) 数学的知識の構成や価値付けは、授業での状況に依存してなされる。ここでいう状況とは、フランス数学教授学の基本的概念の1つで、成功的な授業には生徒が問題に働きかけたり（行為）、理由付けをしたり（妥当化）、他者とやりとりをしながらまとめあげたり（定式化）、最後には教室外の一般的知識とつながりをつけられたりする状況（制度化）が現れるという（たとえば表1参照）。授業の進展をこうした状況の変容過程として捉えるならば、その変容は生徒がどのような価値付けを行ったかに依存するであろう。本研究では上記成果(1)にしたがって、知識の価値を「有用性」に置き、広義の問題解決にあたっても有用であることをもって、その知識に意義や意味が見出されるとする。したがって、従来の図形認知研究の対象とされてきた形の識別は、生徒にとっての目的意識や授業での状況に応じて変わることが示唆される。このことは状況依存性という知識の性格にあたり、数学授業を提案するための1つの原理となるものである。

以上の考察によって、たとえば授業で扱い構成された知識について、生徒は教師の思うほど一般化させていない、別の場面になると積極的に活用しようとししない現象を説明できるようになる。それは、当該知識が上記のどの状況で構成されたかによるもので、生徒によって様々なアイデアが出されたものの、その意味の理解と共有が優先され、妥当性が問題とされることがなかったため、自らの行為を反省しての妥当化の状況は現れなかったことが理由となる。

(4) 中学校第一学年「平面図形」を題材として小学校高学年からの接続を意図した「図形の敷き詰め課題」（図1）への取り組みを軸とし、図形の移動と作図、対称性の理解をねらいとする授業を現場教師との協同により設計し、実践した。これは、数学的知識の道具的性格はその有用性と結びつき、課題の解決において、図形の敷き詰め模様を作図したり、移動させたりする活動が高次の数学的な見方へとつながるといふ、研究成果(1)～(3)を踏まえた具体的な提案である。また、このあたりの従来の単元構成では、図形の移動と作図、対称性の理解が互いに関連のないままに配置されている場合が多く、これらを同一平面上の

敷き詰め活動によって、連続的に展開させることにねらいがある。



図1. 敷き詰め課題で用いた単位図形

合計6時間の授業実践を「研究方法」で述べたような質的方法によって分析し、敷き詰め活動が基本的な作図のアイデア、移動のアイデアにつながって発展していく様子を記述した。そのうちの生徒の思考の様子の一部は以下の通りである：

- ① 課題の解決のために、生徒は図形の辺を延長したり、平行線を利用したりする。
- ② 個々の図形からなるまとまり（単位）に着目する生徒もおり、授業のなかでそのアイデアは即座に交流される。
- ③ まとまり（単位）を作り出すなかにも(I) 図形をひとまとまりの単位とみる、(II) 実際にまとまりを作る、(III) まとまりを課題解決のために操作する、(IV) まとまりからなる新たなまとまりを作る、という4つの段階がある。

たとえば、生徒は図1右の図形を用いた、下の図2のような敷き詰め模様を完成させる。

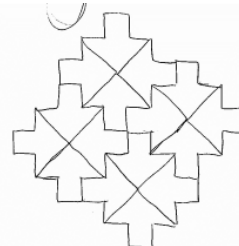


図2. ある生徒による敷き詰め模様

これは、③のうち、(IV)の状態の典型例であり、敷き詰め可能性を学級で追求するなかで見出されたあるまとまりに着目し、まとまりのまとまりとして作り出したものである。以降では、この模様を作り出す方法の妥当性が協議され、その方法を繰り返すことで平面を埋め尽くすことができることが同意された。また、特に、中等教育における幾何学習で育成が期待されるような、高次の幾何的思考（図形の決定条件、パターンの認識と活用など）を生徒は潜在的に行うのであり、教師から明示的に教えられずとも図形の対称性を作図に利用したり、図形の移動に際して作図の経験を生かしたりしていた。これは上記の原理に基づいて活動の場を設定した授業であるからこそである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

①岡崎正和, 影山和也(2010), What are dynamic views in geometry? A design experiment in a sixth grade classroom, *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.4, pp.1-8, 査読有り.

②岡崎正和, 影山和也, 岩崎秀樹, 和田信哉(2010), 「図形における動的な見方の具体化—イメージ図式の視点をもとにして—」, 『全国数学教育学会誌数学教育学研究』, 第16巻, 第2号, pp.1-10, 査読有り.

③岡崎正和, 岩崎秀樹, 影山和也, 和田信哉(2009), 「論証への接続を目指した算数の図形指導に関する研究(1)—図形の包含関係の理解を促す動的な見方の具体化—」, 『第42回数学教育論文発表会論文集』, pp.325-330, 査読有り.

④影山和也(2009), 「観察科学・実験科学としての図形指導の可能性—「道具主義的」認識論の立場から—」, 『第42回数学教育論文発表会論文集』, pp.343-348, 査読有り.

⑤中原忠男, 清水紀宏, 影山和也, 山田篤史, 山口武志, 小山正孝, 飯田慎司, 植田敦三(2009), 「潜在的な数学的能力の測定用具の活用化に向けた開発的研究(II)—小学校4年生の潜在力と達成度との関係—」, 『全国数学教育学会誌数学教育学研究』, 第15巻, 第2号, pp.81-93, 査読有り.

⑥影山和也(2008), 「算数授業における多様な合理性」, 『日本数学教育学会誌算数教育』, 第90巻, 第12号, pp.30-39, 査読無し.

⑦中原忠男, 山田篤史, 清水紀宏, 植田敦三, 飯田慎司, 小山正孝, 山口武志, 影山和也(2008), 「潜在的な数学的能力の測定用具の活用化に向けた開発的研究(I)—小学校4年生の潜在力と達成度との関係—」, 『第41回数学教育論文発表会論文集』, pp.3-8, 査読有り.

⑧影山和也(2008), 「教室で作上げられる数学的知識について—教授学的状況に応じた生徒の意識性と知識の価値—」, 第41回数学教育論文発表会論文集, pp.405-410, 査読有り.

⑨影山和也(2008), 「図形・空間学習における学習者の知識体系とその活性化に関する研究—数学授業中の討議でなされる正当化について—」, 『全国数学教育学会誌数学教育学研究』, 第14巻, pp.19-30, 査読有り.

[学会発表] (計4件)

①影山和也, 中等幾何教育における幾何的思考の様相—敷き詰め課題における単位図形の構造化—, 第33回全国数学教育学会研究発表会, 2011年1月22日, 愛媛大学.

②影山和也, 岡崎正和, 岩崎秀樹, 和田信哉, 図形の動的な見方の構造化—比喩の視点から—, 第32回全国数学教育学会研究発表会, 2010年6月27日, 広島大学.

③岡崎正和, 影山和也, 岩崎秀樹, 和田信哉, 図形における動的な見方の具体化, 第31回全国数学教育学会研究発表会, 2010年1月23日, 大分大学.

④中原忠男, 影山和也, 清水紀宏, 植田敦三, 飯田慎司, 小山正孝, 山口武志, 山田篤史, 潜在的な数学的能力の測定用具の活用化に向けた開発的研究(II)—小学校4年生の潜在力と達成度との関係—, 第29回全国数学教育学会研究発表会, 2009年1月24日, 姫路市立教育研究所.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

影山 和也 (KAGEYAMA KAZUYA)  
愛知教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 60432283

### (2)研究分担者

( )  
研究者番号:

### (3)連携研究者

( )  
研究者番号: