様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　5　月　10　日現在

機関番号：10101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008～2011
課題番号： 20740002
研究課題名（和文）自己同型群による不変部分頂点代数の表現の結合的代数を用いた研究
研究課題名（英文）Research on modules over fixed point vertex subalgebras
研究代表者
田邊　顕一朗（Kenichiro Tanabe）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：10334038

研究成果の概要（和文）：
(1) 可換多元環から構成される頂点代数上の有限次元加群について研究した．不変部分微分体上の有限次元加群は，もとの微分体上のツイステッド加群の構造を持つことを示した．
(2) 頂点代数のツイステッド加群の定義を拡張した．さらに，対応するゾー代数を構成した．つまり，頂点代数上の拡張したツイステッド加群における単純加群と，対応するゾー代数上の単純加群との間の対応を与えた．これはゾーの結果の自然な拡張になっている．

研究成果の概要（英文）：
(1) I investigated the finite-dimensional modules over vertex algebras constructed from commutative algebras. I showed that every finite-dimensional module over a fixed point differential subfield has a structure of twisted module over the original differential field.
(2) I generalized a notion of a twisted module over a vertex algebra. Moreover, I constructed a corresponding Zhu algebra. Namely, I established a correspondence between the simple generalized twisted modules over a vertex algebra and the simple modules over the Zhu algebra. This correspondence is a natural generalization of the results by Zhu.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：頂点代数

１．研究開始当初の背景

頂点(作用素)代数とは，ムーンシャイン予想の解決や２次元共形場理論の数学的定式化等を目的として 1986 年にボーチャーズによって導入された無限個の積を持つ代数的対象である．1989 年にダイグラーフ達によって頂点作用素代数 V と有限自己同型群 G が与えられたときに，その不変部分頂点作用素代数 V^G の表現を V の表現と G の情報を用いて記述するという問題が提起された．V に関する適当な条件の下で V^G 加群の圏と，G から構成されるある多元環上の加群の圏とが同値になるという双対性が予想されている．この双対性の予想は，付随する保型関数と有限群論とを結びつけるものにもなっている．

頂点作用素代数 V に対してヅー代数と呼ばれる多元環が定義され，V の表現を制御していることが知られていた．しかし自己同型群 G に対して V の表現と V^G の表現を関連させて考察するためには不十分であったため，研究代表者は拡張されたヅー代数を定義し，それを用いてツイステッド V 加群が完全可約 V^G 加群であることを示した．上記の双対性の予想が正しければ，V^G 加群はその分解に全て表れていることが従うため，この結果は V^G の表現論において非常に重要である．また V 加群を分解して得られる V^G 加群達のフュージョン則の下限を得た．いくつかの実験結果からこの下限とフュージョン則との一致を予想している．さらに山田裕理氏(一橋大)とともに，リーチ格子に付随する頂点作用素代数の，位数 3 の群による不変部分代数に対して単純加群の分類をおこない，全ての加群が完全可約であることを示した．これはフレンケル達が予想しているムーンシャイン頂点作用素代数の別構成の第一段階に当たる．この別構成は双対性の予想から従うものであり，またモンスター単純群の位数 3 の元の中心化群の作用が具体的に分かるようになるため，重要である．頂点作用素代数の複雑な計算を実行するプログラムの開発に成功したこととヅー代数の計算をうまくおこなう手法を見付けたことが，この研究で重要な役割を果たした．また，一変数多項式環から構成される頂点代数の場合は，双対性の予想がより強い形で成立していることを検証することが出来た．これは，頂点作用素代数より広いクラスである頂点代数において予想が成立しているのではないかということを示唆する興味深い結果であった．研究代表者のこれらの一連の結果は，難解といわれている不変部分代数の表現についての理解を確実に進展させたものであり，この研究を継続する必要性があった．双対性の予想の完全解決には，まだしばらく時間がかかると思われるが，解決に向けて頂点代数の表現論をさらに進展させる必要がある．

２．研究の目的

研究目的は次の通りである．

(1) 双対性の予想を多くの例において検証する．可換多元環から構成される頂点代数においては，多元環としての加群と頂点代数としての加群は一般に異なるというボーチャーズによる指摘がある．しかし，可換多元環上の頂点代数加群の研究はこれまで全くなされてこなかった．一般に頂点代数の加群を調べることは非常に難しいが，可換多元環上の頂点代数加群は比較的取り扱いが簡単になる．ここで双対性の予想を検証する．

(2)双対性の予想を解決するために頂点代数の表現論を進展させる．ツイステッド加群の拡張をおこない，その性質を調べる．

３．研究の方法

(1) 可換多元環から構成される頂点代数上の加群を詳しく調べることにより，双対性の予想を検証する．また表現が半単純でない場合にどのような直既約加群が現れるかを調べる．多くの具体例に対して，直既約加群を分類する．

(2) 頂点代数の加群の定義を拡張することにより，双対性の予想を解決するために必要な適切な加群のクラスを与える．

４．研究成果

(1) 頂点代数の一番簡単な例である可換多元環から構成される頂点代数に対して，有限次元加群の研究をおこなった．可換多元環が微分体である場合には双対性の予想を検証することが出来た．正確には固定部分微分体上の直既約な頂点代数加群に対して，適当な自己同型を考えるとその加群構造と両立するツイステッド 加群構造が入ることを示した．さらにそのようなツイステッド加群構造には有限群が正則に作用していることを示した．特に有限群の位数個のツイステッド加群構造が存在することが分かる．継続した研究において，この結果は可換多元環とその上のガロア拡大における(ツイステッド)頂点代数加群間の対応に拡張することが出来た．これにより，可換多元環上の有限次元加群の場合には双対性の予想が満足できる形で解決したことになる．

また一変数有理関数体上の有限次元頂点代数加群を分類することが出来た．導分が零である場合を除き，任意に与えられた次元に

対して非常にたくさんの直既約加群を構成することが出来る．特に一変数有理関数体に対しては多元環加群と頂点代数加群が大きく異なっていることが分かる．そこで構成された頂点代数加群を用い，一変数有理関数体上の有限次ガロア拡大を考えることによって，様々な有限群に対して上記のツイステッド 加群と固定部分頂点代数上の頂点代数加群との対応を確認することが出来る．特にこれは可解群以外の有限群に対して対応が示された初めての例を与えている．また一変数多項式環の場合を除いて，既約加群だけでなく直既約加群に対しても対応が示された初めての例を与えている．さらに一変数有理関数体上の二次拡大の場合には実際にどのようなツイステッド加群が現れるかを判定するための導分に関する簡明な判定条件を与えた． 継続した研究により，一変数ローラン多項式環上の有限次元加群の分類も出来た．

(2) 双対性の予想では通常の加群を拡張したツイステッド加群が基本的な役割を果たしていると期待されている．しかし，ツイステッド加群は直和に関して閉じていないことから通常の加群論を展開するには困難が生じていた．特に群が非可換群の場合にこれは本質的な困難となる．私はこの問題点を解消を目的として，直和で閉じるようにツイステッド加群を拡張した．この拡張は自然なものであるが，対応するボーチャーズ恒等式が非常に複雑となるため，既存の手法の単なる適用ではこれまでに得られている有用な結果の類似を得ることは出来ない．私は，頂点作用素代数の場合にこの拡張されたツイステッド加群に対応するヅー代数の類似を構成した．1996 年にヅーによって頂点作用素代数に対して導入されたヅー代数は，その既約加群が対応する頂点作用素代数の既約加群と一対一に対応することから，頂点作用素代数の表現論，特に既約加群の分類と完全可約性の証明，において重要な役割を果たしてきた．今回構成したヅー代数は，その後のドン-リイ-メイソンおよび宮本-田邊による拡張を全て含む統一的なものであり，その既約加群は拡張されたツイステッド既約加群と一対一に対応している．今回の結果は，ツイステッド加群をより自然に扱えるように加群を拡張したこと，およびヅー代数を構成して拡張した加群の取り扱いを可能にした点で，固定部分頂点代数上の加群の研究において重要である．

(3) 今後の展望

頂点代数の拡張された加群に対してその性質を調べる．通常の加群に対してこれまで積み上げられてきた結果の類似が成立することを確かめていく．構成した対応するヅー代数を用いて拡張された加群のモジュラー不変性を調べる．困難な場合は，拡張された加群の完全可約性を仮定してモジュラー不変性を示す．

一般論が上記の部分まで出来た後は，具体例に関して拡張された加群を完全に求める．対称群を自己同型群に持つ格子に付随する頂点作用素代数の不変部分代数を調べる．拡張された加群において既約加群の分類と加群の完全可約性の判定をおこなう．

これまでの不変部分代数に関する研究結果を用いることによって，この頂点作用素代数に対しては既にツイステッド 加群ではない拡張された既約加群を具体的にいくつか構成することが出来ている．構成した対応するヅー代数の構造をこの場合に決定できれば，既約加群がそれらで尽きているかどうかの判定が出来る．これまでの研究における経験からその計算がかなり面倒になることが分かっているので，蓄積した具体例の計算における研究方法を発展させてその部分をうまく処理する方法を見付ける必要がある．

また付随する保型関数を求める．全て求めることが困難な場合は，少なくとも指標の計算はおこなう．

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① Kenichiro Tanabe, Finite-dimensional vertex algebra modules over fixed point commutative subalgebras, J. Algebra 337, 323-334 (2011) (査読有).
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.04.024

② Kenichiro Tanabe and Hiromichi Yamada, Representations of a fixed point subalgebra of a class of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, European Journal of Combinatorics 30, 725-735 (2009) (査読有).
DOI: 10.1016/j.ejc.2008.07.002

〔学会発表〕（計 7 件）

①Kenichiro Tanabe, 頂点代数のツイステッド 加群について，日本数学会年会(2012年)，2012年3月26-29日，東京理科大学.

②Kenichiro Tanabe, 頂点代数のツイステッド 加群について，有限群と頂点作用素代数，2012 年 2 月 17-18 日，東京女子大学.

③ Kenichiro Tanabe, On vertex algebra modules over commutative algebras″ Workshop on Algebraic Combinatorics,

2010 年 11 月 26 日-28 日，河北師範大学(中国)

④Kenichiro Tanabe, 有限群の作用で不変な部分微分体上の頂点代数としての有限次元加群，日本数学会年会(2010年)， 2010年3月24日-27日,慶應義塾大学矢上キャンパス.

⑤Kenichiro Tanabe, 一変数多項式環の二次拡大から構成される頂点代数の有限次元加群,2009年6月24日-26日，遊学館（山形県生涯学習センター).

⑥Kenichiro Tanabe, 可換多元環から構成される頂点代数の加群について，日本数学会年会(2009年)， 2009年3月26日-29日,東京大学駒場キャンパス.

⑦Kenichiro Tanabe, On modules for vertex algebras constructed from quadratic extensions of the polynomial ring in one variable, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 2009 年 2 月 9 日-10 日, Pusan National University.

６．研究組織

(1)研究代表者

田邊　顕一朗（Kenichiro Tanabe）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：10334038

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし