

機関番号：11301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740003

研究課題名（和文） ターウィリガー代数に基づく符号・デザインの代数的理論

研究課題名（英文） Algebraic theory of codes and designs based on the Terwilliger algebra

研究代表者

田中 太初 (TANAKA HAJIME)

東北大学・大学院情報科学研究科・助教

研究者番号：50466546

研究成果の概要（和文）：これまで主に（可換）Bose-Mesner 代数を用いて展開されていたアソシエーションスキーム上の符号・デザイン理論を、（非可換）Terwilliger 代数に基づき再構築すことを目指した。Brouwer 達による幅・双対幅の理論の精密化等に関して集大成となる論文が完成した他、距離正則グラフの基礎理論の  $Q$ -多項式アソシエーションスキームへの「双対化」や、半正定値計画・Leonard 対等の新しい手法の応用に関して種々の試みを行った。特に、極値集合論の Erdős-Ko-Rado 定理への応用で大きな成功を収めた。

研究成果の概要（英文）：I tried to develop a new theory of codes and designs on association schemes based on the (noncommutative) Terwilliger algebra in place of the (commutative) Bose-Mesner algebra. The outcome of the research includes a fundamental contribution to the theory of width and dual width by Brouwer et al., as well as applications of new tools such as semidefinite programming and Leonard pairs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組合せ論、アソシエーションスキーム、符号、組合せデザイン、ターウィリガー代数

## 1. 研究開始当初の背景

Delsarte は、本来 Hamming スキーム上の（通常の意味での）符号に対し導入された線型計画限界をより一般に  $P$ - $Q$ -多項式スキームの枠組みに持ち込むことにより、組合せ的・代数的手法を最大限に活用して、その後数十年間にわたり決定的に重要な影響を及ぼすこととなった彼の理論を築いた。符号・デザインに関するこの Delsarte の理論は 1973 年の

時点で実質的にはほぼ完成した理論であると考えられていたが、今世紀に入り大きな進展が二つ立て続けに起こった。すなわち Brouwer, Godsil, Koolen, Martin による幅・双対幅の理論、及び Schrijver による半正定値計画限界である。Delsarte 理論の根幹は（可換）Bose-Mesner 代数に基づいた線型計画限界にあったが、これら二つの理論は本質的に（非可換）Terwilliger 代数の表現論に基づいている。私のこれまでの研究は主にア

ソシエーションスキームの指標表の性質及びその応用に関するものが多いが、これらの理論は従来の Delsarte 理論を根底から変容させる可能性を予感させるに十分なものであり、このことが本研究計画を設定した動機である。

## 2. 研究の目的

本研究の目標は、 $P$ - $Q$ -多項式スキームの各頂点に付随する Terwilliger 代数、及び Schrijver により提唱された半正定値計画限界に基づく、新たな「符号・デザインの代数的理論」の構築である。本研究では特に、Terwilliger 代数の既約加群で displacement と呼ばれるパラメータが 0 となるもの全体で生成される空間  $N$  に注目する。ある意味で Terwilliger 代数の自明加群上の理論ともみなせる従来の Delsarte 理論を  $N$  上に拡張・一般化し、一方で (Hamming スキームの) 自己同型群の安定部分群の中心化環上で定義された半正定値計画限界を  $N$  上で新たに定式化し直すこと等を通してこの目標の達成を目指す。

## 3. 研究の方法

Brouwer 達の幅・双対幅の理論では、これら二つのパラメータがある特殊な関係を満たす部分集合 (「descendent」と呼ぶ) が重要な役割を果たすが、実際これら descendent は空間  $N$  や  $P$ - $Q$ -多項式スキームの所謂「tight 性」等と密接に関連している。また、Terwilliger 代数の「良い」既約加群の性質を抽象化したものとして Terwilliger による Leonard 対の概念があるが、本研究では代数的対象である Terwilliger 代数及び空間  $N$ 、組合せの対象である descendent、さらに線型代数的対象である Leonard 対のそれぞれの観点から多角的なアプローチを行い、本質を明らかにすることを目指した。

## 4. 研究成果

(1) 空間  $N$  や descendent に関連して定式化された、(1 変数 Askey-Wilson 直交多項式を特徴付ける) Leonard 対に関する問題の解を完全に記述した (論文 3)。この結果は特に descendent に関するパラメータのレベルでの情報を全て与えるものであり、本研究に於いて極めて重要なステップである。

(2) 空間  $N$  及び tight 性に関する研究について、数回の口頭発表を行った (口頭発表 11 等)。空間  $N$  は、最も簡明かつ基本的な  $P$ - $Q$ -多項式スキームである 2 進 Hamming スキームの性質をある意味で多く受け継いでおり、そ

の「 $Q$ -多項式性」等を解明した。

(3) William J. Martin と共同で、可換アソシエーションスキーム理論の解説論文を執筆した (論文 4)。この招待論文では、本研究計画の目標である「従来の符号・デザイン理論 (Delsarte 理論) の非可換 Terwilliger 代数上での拡張・再構築」という今後の研究の方向性をはっきりと提唱した。また、Schrijver による (群の作用を用いた) 2 進符号の半正定値計画限界、及び (可換群が正則に作用する場合の) 双対スキームの理論等について Terwilliger 代数の観点から再構成・解釈を行った。

(4) Qiu 及び Zhan による行列理論の結果に対しアソシエーションスキーム理論の手法を用いた別証明を与えた (論文 6)。これは本研究計画の遂行過程で副産物として得られたもので、直接符号・デザインに関する結果ではないが、他分野への「応用」との点で研究目的の趣旨に沿ったものとする。

(5) 局所構造に関する tight 性の双対的性質を、一般の  $Q$ -多項式アソシエーションスキームに於いて定式化し、正則性に関する考察やクラスが小さい場合の特徴付け等を行った。東北大学の須田庄氏との共同研究であり、成果の一部についてアメリカ数学会で口頭発表を行った (学会発表 8, 10)。

(6) 非原始的な  $P$ -多項式アソシエーションスキームは二部 (bipartite) もしくは極対的 (antipodal) であるという結果は基本的であるが、この  $Q$ -多項式版である 1998 年の鈴木寛の結果では、双対二部・双対極対的の他にクラス 4 と 6 の例外的なパラメータが未解決問題として残されていた。クラス 4 の例外型パラメータは 2009 年に Cerzo・鈴木により整数条件を用いて除外されたが、私は田中利恵氏と共同で、クラス 6 の例外型パラメータが起こらないことを異なるアプローチを用いて証明した。これにより非原始的  $Q$ -多項式アソシエーションスキームの構造定理が最終的に完成したことになる。なお、2010 年 5 月には Martin 達と共同で米国 Worcester Polytechnic Institute に於いてワークショップ「Schemes and Spheres」を主催した (<http://users.wpi.edu/~martin/MEETINGS/wpi10.html>)。このワークショップの主なテーマは  $Q$ -多項式アソシエーションスキームであり、田中利恵氏との研究はこのワークショップに向けて行ったものである。

(7) 本研究計画の集大成となる論文を現在投稿中である (arXiv:1005.3598)。まず、 $P$ - $Q$ -多項式スキームの descendent の構造理

論を展開し、特に、descendent の連結性や凸性の判定条件を P-&Q-多項式スキームのパラメータを用いて記述した。これは Brouwer 達の理論を遙かに精密化したものであるが、ここで重要な点は、descendent の「局所的性質」と P-&Q-多項式スキームの「大域的情報」との関連を明らかにしたことである。距離正則グラフの研究で部分構造から全体を決定するアプローチは主流の一つであるが、この結果は P-&Q-多項式スキームの研究に於いて対応するアプローチと言えよう。なお、ここでの本質的な議論は Leonard 対のレベルで行われ、上記(1)の成果が直接応用される。

二部 P-&Q-多項式スキームについては、固定した 1 点から最も遠い点全体の集合 (last subconstituent) がまた P-&Q-多項式スキームになるという Caughman の結果がある。私は構造理論の一環として、このような P-&Q-多項式スキームの連結成分 (bipartite half) の descendent と last subconstituent との共通部分が、last subconstituent の descendent になることも証明した。この結果もまた、局所的性質と大域的性質の関連を述べるものと言えるが、証明はやはり Terwilliger 代数の既約加群の記述に帰着される。

現時点で知られている P-&Q-多項式スキームの多くは所謂「古典的パラメータ」を持ち、そうでない P-&Q-多項式スキームについてもほとんどは古典的パラメータを持つグラフに密接に関連している。本研究計画の開始時点では、Brouwer 達や私により古典的パラメータを持つ基本的な 5 種類のグラフについて descendent の分類が完了していたが、私はさらに古典的パラメータを持つ既知の 15 種類の無限系列全てについて descendent の分類を完成した。グラフが古典的パラメータを持つ場合、非自明な descendent は上述の構造理論により凸集合となることに注意する。これらの P-&Q-多項式スキームに於ける descendent の分類は、いくつかの族については Lambeck による凸集合の分類を用い、また二部 P-&Q-多項式スキームの bipartite half であるものについては前段落の結果を効果的に用いた。後者のタイプのうち、二つの例については Pepe 達による部分的な結果があるが、彼らの手法は有限体上の線型空間に関する Erdős-Ko-Rado の定理を主要な道具として用いるものであり、私の手法はより「直接的」なものであると言える。なお、これら 15 種類のうち、既に分類が行われていた 5 種類の P-&Q-多項式スキーム及びそれに関連するものと、そうでない P-&Q-多項式スキームでは、descendent の分布に顕著な違いが認められた。すなわち、前者は descendent をある意味で「豊富に」持ち、後者はほとんど持たない。この差異を理解することは今後

の重要な課題であると考ええる。

また別の試みとして、descendent を「最も豊富に」持つ P-&Q-多項式スキームを Terwilliger による量子マトロイドの観点から特徴付け、そのような P-&Q-多項式スキーム分類も行った。ある状況下で descendent 全体が量子マトロイドになることを示すのであるが、この結果は強閉 (strongly closed) 部分集合を「最も豊富に」持つ距離正則グラフに関する平木彰の一連の研究に類似したものと言えよう。

(8) 上記の成果の応用として、2005 年に van Dam と Koolen により発見された twisted Grassmann graph に関する Erdős-Ko-Rado 型定理がこれらの研究の応用として得られ、現在論文を投稿中である (arXiv:1012.5692)。これまで知られていた Erdős-Ko-Rado 型定理のほとんどは非常に大きな自己同型群を持つグラフに関するものであるが、twisted Grassmann graph は頂点可移ですらないことに注意する。この twisted Grassmann graph は Grassmann graph と同じパラメータを持ち、交叉族 (intersecting family) の位数の上界は Frankl と Wilson による Grassmann graph の場合の上界がそのまま適用できるので、等号が成立する場合である descendent の分類に帰着されるのである。実際この論文では、種々の P-&Q-多項式スキームの Erdős-Ko-Rado 型定理の証明を整理し、Delsarte の線型計画的手法と descendent の立場から統一的なアプローチを行っている。なお、交叉族の位数の上界については、より抽象的に Leonard 対のレベルで理論を展開することができ、またその方がより自然である。この「解釈」については別個論文を準備中である。

(9) 須田氏とは、さらに半正定値計画の手法を用いた Erdős-Ko-Rado 型定理の拡張についても共同研究を行った。他の研究者による、組合せ的手法を用いたより単純な証明の存在がその後判明したため、残念ながら (ほぼ仕上がっていた) 論文を投稿することはできなかったが、実際須田氏との研究はアソシエーションスキームの一般化であるコヒアレント配置 (coherent configuration) 上の符号・デザイン理論の構築を目指す取り組みの一環であり、今後も研究を継続する予定である。

(10) 2011 年 1 月より、Edwin van Dam 氏及び Jack Koolen 氏と共同で、距離正則グラフに関する概説論文の執筆に取り組んでいる。私の主な担当は Q-多項式距離正則グラフ (すなわち P-&Q-多項式スキーム) である。本研究計画のテーマである符号やデザインへの

応用は（直接には）盛り込まれない予定であるが、距離正則グラフに関するこれまでの膨大な研究を整理し、理解を深めることで、本研究に関しても多くの知見やフィードバックが得られている。なおこの論文は、距離正則グラフ理論の大家である Andries Brouwer の還暦を記念するものである。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計6件）

1. 田中太初, 田中利恵, Nonexistence of exceptional imprimitive  $Q$ -polynomial association schemes with six classes, *European Journal of Combinatorics*, Elsevier, 32巻, 2号, pp. 155-161, 2011, 査読有.
2. 坂内英一, 島袋修, 田中太初, Finite Euclidean graphs and Ramanujan graphs, *Discrete Mathematics*, Elsevier, 309 巻, 20 号, pp. 6126-6134, 2009, 査読有.
3. 田中太初, A bilinear form relating two Leonard systems, *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, 431 巻, 10 号, pp. 1726-1739, 2009, 査読有.
4. William J. Martin, 田中太初, Commutative association schemes, *European Journal of Combinatorics*, Elsevier, 30 巻, 6 号, pp. 1497-1525, 2009, 査読有.
5. 田中太初, New proofs of the Assmus-Mattson theorem based on the Terwilliger algebra, *European Journal of Combinatorics*, Elsevier, 30 巻, 3 号, pp. 736-746, 2009, 査読有.
6. 田中太初, A note on the span of Hadamard products of vectors, *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, 430 巻, 2/3 号, pp. 865-867, 2009, 査読有.

〔学会発表〕（計12件）

1. 田中太初, Vertex subsets with minimal width and dual width in  $Q$ -polynomial distance-regular graphs, Mini Workshop, Texas 大学 Brownsville 校, Brownsville, Texas, 米国, 2011 年 2 月 11 日.
2. 田中太初, Vertex subsets with minimal width and dual width in  $Q$ -polynomial distance-regular graphs, *Linear Algebra Techniques in Combinatorics/Graph Theory*, The Banff Centre, Banff, Alberta, カナダ, 2011

年 2 月 2 日.

3. 田中太初, A note on super Catalan numbers, Combinatorics Seminar, Wisconsin 大学 Madison 校, Madison, WI, 米国, 2011 年 1 月 24 日.
4. 田中太初, Subsets with minimal width and dual width in  $Q$ -polynomial distance-regular graphs, Combinatorics Seminar, Wisconsin 大学 Madison 校, Madison, WI, 米国, 2010 年 10 月 25 日.
5. 田中太初, The Terwilliger algebra of a graph, 松江セミナー, 松江大学, 2009 年 9 月 9 日.
6. 田中太初, 具体例に於ける Terwilliger 代数の既約加群の計算, 小研究集会「有限幾何とその周辺」, 東京女子大学, 2009 年 8 月 7 日.
7. 田中太初,  $Z_4$ -Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets, 夏の学校「Designs and Codes」, ヒルズサンピア山形, 2009 年 6 月 23 日.
8. 須田庄, 田中太初, 田中利恵, Dual tight cometric association schemes, AMS 2009 Eastern Section Meeting, Worcester 工芸大学, Worcester, MA, 米国, 2009 年 4 月 26 日.
9. 田中太初, A bilinear form relating two Leonard systems, Combinatorics Seminar, Wisconsin 大学 Madison 校, Madison, WI, 米国, 2009 年 4 月 20 日.
10. 須田庄, 田中太初, Dual-tight cometric association schemes, ミニ集会「代数的組合せ論」, 九州大学, 2009 年 3 月 18 日.
11. 田中太初, The nucleus of a  $Q$ -polynomial distance-regular graph, The 5th Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics, 九州大学, 2008 年 9 月 19 日.
12. 田中太初, A bilinear form relating two Leonard pairs and its applications, Geometric and Algebraic Combinatorics 4, Hotel Conferentiecentrum Boschoord, Oisterwijk, オランダ, 2008 年 8 月 20 日.

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

田中 太初 (TANAKA HAJIME)

東北大学・大学院情報科学研究科・助教

研究者番号 : 50466546