様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月１３日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２００８～２０１０
課題番号：２０７４０００６
研究課題名（和文）　開代数曲面の分類とその応用

研究課題名（英文）　Classification of open algebraic surfaces and its applications

研究代表者
小島　秀雄（KOJIMA HIDEO）
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：９０３３２８２４

研究成果の概要(和文):対数的小平次元が 1 となる開代数曲面の構造定理を任意標数で確立し，その結果を用いることにより，非有理代数曲面の対数的多重種数と対数的小平次元の関係を明らかにした。また多項式環の高階導分の核に関して研究を行い，整域上の 2 変数多項式環の高階導分の核の構造を明らかにした。更に，これらの研究成果を用いて，ある種の対数的標準特異点のみを持つピカール数 1 の正規デルペッゾ曲面を分類し，そして，オイラー数が零以下となる正規アフィン代数曲面の構造を解明した。

研究成果の概要（英文）：I gave a structure theorem for the open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension one in arbitrary characteristic and, by using the structure theorem, I gave a relation of logarithmic Kodaira dimension and logarithmic plurigenera for an irrational algebraic surface. Moreover, I had studied kernels of higher derivations in polynomial rings and clarified the structure of the kernels of higher derivations in polynomial rings in two variables over an integral domain. By using the results obtained in this research, I classified some normal del Pezzo surfaces of Picard number one with only log canonical singular points and clarified the structure of the normal affine surfaces with non-positive Euler numbers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・代数学
キーワード：　代数幾何，開代数曲面，対数的小平次元，高階導分

１．研究開始当初の背景

（１）開代数曲面
飯高氏の対数的小平次元の理論により，代数幾何の手法を用いた開代数多様体（完備でない代数多様体）の研究が進展した。特に開代数曲面の対数的小平次元による構造は川又氏，藤田氏，宮西氏，角田氏等により研究

が行われ，基礎体の標数が零の場合は射影代数曲面の場合と類似した形で成立している。開代数曲面の構造に関する研究成果はジャコビアン予想，消去問題，代数群のアフィン空間への作用に関する線形化可能問題等のアフィン代数幾何学の諸問題に応用されている。

しかしながら，開代数曲面については，対数的小平次元が負になる場合の研究が中心であり，対数的小平次元が非負の場合は構造定理はあるものの，詳細な構造の解析は対数的小平次元が負の場合に比べて不十分である。しかも，基礎体の標数が正の場合は部分的な結果しかなく，基礎体の標数が正の場合に開代数曲面の対数的小平次元による構造定理を確立させることは重要な問題となっている。

（２）多項式環の不変式環

多項式環の導分や局所べき零導分による不変式環（今後，核と呼ぶ）の研究はアフィン代数幾何学の中心的な課題であり，ヒルベルトの第 14 問題の反例の構成や多項式環の自己同型群の研究等に応用されている。

多項式環の導分や局所べき零導分の核は基礎体の標数がゼロのときのみ意味があり，正標数の場合は導分や局所べき零導分の類似物として高階導分や階層的局所有限高階導分があるものの，それらの核の研究はこれまで殆ど行われていなかった。しかしながら，正標数での対数的小平次元が負となるアフィン代数多様体の構造を研究するためには，多項式環の高階導分や階層的局所有限高階導分の核の研究は避けて通れない。

２．研究の目的

任意標数での対数的小平次元が非負となる開代数曲面の分類理論を構築し，その結果を用いて，正規代数曲面やアフィン代数多様体の構造を解明する。また，正標数での対数的小平次元が負となるアフィン代数多様体の構造を解明するための前段階として，多項式環の高階導分や階層的局所有限高階導分の核の構造を解明する。より具体的には次の課題について研究を行う。

（１）開代数曲面について

開代数曲面や正規アフィン代数曲面の対数的小平次元による構造定理を任意標数で確立する。更に，それらの対数的小平次元と対数的多重種数の関係を調べる。つまり，対数的小平次元が非負のとき，対数的 n 種数が正になるような，曲面によらない自然数 n を求める。

（２）正規代数曲面について

開代数曲面や正規アフィン代数曲面に関する諸結果を用いて，射影平面に近い性質を持つ正規代数曲面であるピカール数１の正規デルペッゾ曲面の構造を調べる。

（３）多項式環の部分代数について

多項式環の高階導分や階層的局所有限高階導分の核の環論的性質を調べ，そのような核の有限生成性を調べる。また，多項式環の部分代数が高階導分の核として表わされるための条件を求める。

３．研究の方法

２の研究の目的での項目毎に分けて書く。尚，以下の項目毎の研究方法は完全に独立してはおらず，特に（１）と（２）の研究方法は密接に関係している。

（１）開代数曲面に関する研究方法

①次の流れで開代数曲面 S の強極小モデルを構成する。S の SNC 完備化(X,B) (X は射影代数曲面，B は S=V-B となる単純正規交叉因子)の通常の極小モデル(概極小モデルと呼ばれる)(W,C)を構成する。C の全ての連結成分が対数的端末特異点につぶれる場合はこれで終わりにするが，そうでない場合は，C の像が単純正規交叉因子になる範囲で可能な限り第一種例外曲線をつぶしていく。このようにしてできた対(V,D)を S の強極小モデルと呼ぶ。

②対数的小平次元が零と１の場合に分けて，S の強極小モデル(V,D)の構造を調べる。対数的小平次元が零の場合は D+K (K は V の標準因子)の Zariski 分解のネフ部分が数値的に自明になることと小平次元が零以下の射影代数曲面に関する結果を用いることにより，(V,D)を分類する。対数的小平次元が１の場合は，対数的 n 重線形系|n(D+K)|から定まる有理写像を調べることにより，対数的標準因子 D+K を明示する。

③②でのことから，S の対数的標準因子が明示されるので，それを用いて，S の対数的小平次元が零または１となる場合に対数的 n 種数が正となる自然数 n を求める。

④対数的小平次元が２の場合は標数が零の場合でも考察が困難であるが，S が非有理線織曲面の場合に，その対数的小平次元と対数的 n 種数の関係を藤田氏による２次元対数的豊潤定理と宮西氏による対数的小平次元が負となる非有理線織曲面の構造定理を用いて調べる。

⑤S が正規アフィン代数曲面の非特異部分になる場合に，S の極小モデルの構成方法を調べ，極小モデルと S の関係を調べる。更に，

これまでに知られている開代数曲面の結果を用いて，オイラー数が零以下となる複素正規アフィン代数曲面の構造を調べる。

（２）正規代数曲面に関する研究方法
射影平面に位相的に近い性質を持つ，ピカール数１の正規デルペッゾ曲面の構造を次のような方法で調べる。

①ピカール数１の高々有理特異点のみを持つ正規デルペッゾ曲面 X の最小特異点解消(V,D)をとる。ここで，V は非特異射影代数曲面，D は V 上の単純正規交叉因子である。

②X の反標準因子-K との交点数が最小となる曲線の V での固有変換像から成る集合を M とする。

③M の元 C に対して，線形系|C+D+K|(K は V の標準因子)が空集合になるかならないかで場合分けをし，|C+D+K|が空にならない場合は Zhang 氏の対数的デルペッゾ曲面に関する結果を用いて，D の可能性がどの位あるかを調べる。全ての M の元 C に対して|C+D+K|が空になる場合は，C と D との交わりの可能性で場合分けをして， 各々の場合に D の可能性を調べる。

④M の元 C で|C+D+K|が空になる場合は完全に D を決定することは困難であると考えられる（実際，X が高々対数的端末特異点しか持たない場合でもこの場合は完全には決定されていない)。この場合，X から C の像を除いてできる曲面は Q ホモロジー平面（ベッチ数が複素アフィン平面と同じになる正規アフィン代数曲面）であることから，Q ホモロジー平面に関するこれまでの結果を用いて考察する。

（３）多項式環の部分代数に関する研究方法
①２００７年度に構成した多項式環の局所有限高階導分の核を求めるアルゴリズムと Maubach 氏による多項式環の局所べき零導分の核を求めるアルゴリズムを組み合わせて，多項式環の階層的局所有限高階導分の核を求めるアルゴリズムが構成できるどうか調べる。

②多項式環の導分の核に関する環論的性質が高階導分の核の場合にどの位成立するのか，導分の核に関する論文を学習しながら調べる。

③体上の n 変数多項式環の高階導分の核について，主に n=2 の場合と核の超越次数が n-1 以上の場合に，②での成果を用いることにより調べる。

④整域 R 上の多項式環の高階導分 D の核について，D を R の商体上の高階導分に延長し，③の体の場合での結果を用いることにより調べる。

４．研究成果
得られた成果を２の研究の目的での項目毎に分けて書く。

（１） 開代数曲面について
開代数曲面について次のような成果を得た。

①対数的小平次元が零となる開代数曲面について，その曲面が有理曲面でない場合の強極小モデルを任意標数で分類した。また，有理曲面の場合は以前の研究で得られていた分類結果を修正し，可縮でない無限遠境界を持つ場合の強極小モデルを標数零のときに分類した。

②対数的小平次元が１となる開代数曲面の構造定理を任意標数で確立した。特にそのような曲面は曲線上の楕円曲面，準楕円曲面，A^1 ファイバー曲面（一般ファイバーがアフィン直線となるファイバー曲面）または A^1_* ファイバー曲面 （一般ファイバーがアフィン直線から一点を除いた曲線となるファイバー曲面）を持つことを示し，曲面の対数的標準因子公式を得た。更に，これらの結果を用いて，非有理線織曲面の対数的小平次元が非負であることとその対数的４種数が正であることが同値であることを示した。これらの結果は標数零の場合と類似の結果であるので，それ程意外な結果とは思われないが，正標数の開代数曲面を研究する上で重要であることは標数零の場合の結果の重要性からみて明らかである。

③オイラー数が零以下となる複素正規アフィン代数曲面の極小モデル理論を構成し，そのような曲面は曲線上一般ファイバーが複素アフィン直線または複素アフィン直線から一点を除いた曲線となるファイブレーションの構造を持つことを示した。更に，そのような曲面の非特異部分の対数的小平次元が非負であることとその対数的２種数が正であることが同値であることを示した。これらの結果は曲面が非特異である場合は既に知られていたが，Langer 氏による対数的宮岡—Yau 不等式の改良版を用いることにより，特異点を持つ場合に拡長することができた。この結果はオイラー数が零以下となる正規アフィン代数曲面だけでなく，Q ホモロジー平面等の複素アフィン平面と位相的に近いアフィン代数曲面の研究にも有効であると

思われ，今後，そのようなアフィン代数曲面の分類や対数的小平次元と対数的多重種数との関係について研究を行う予定である。

（２）正規代数曲面について

ピカール数１の正規デルペッゾ曲面について，その曲面が有理曲面で更に対数的標準特異点しか持たない場合について，部分的な分類を行い，更に，そのような曲面に現れる特異点の個数が５以下であることを示した。高々商特異点を持つ擬射影平面（ベッチ数が射影平面と同じになる正規射影代数曲面）に現れる特異点の個数の研究が近年盛んに行われているが，上記の結果は商特異点より悪い特異点を持つ場合にも同様のことが成り立つ可能性を示唆している。

（３）多項式環の部分代数について

多項式環の高階導分や階層的局所有限高高階導分の核に関して，次のような成果を得た。

①体上の多項式環の階層的局所有限高階導分の核を求める新しいアルゴリズムを構成した。これは核の有限生成性を仮定して更にグレブナ基底を求める計算を用いている谷本氏の構成したアルゴリズムよりも計算効率が良いものとなっており，今後の応用が期待される。

②私が指導した学生である和田教宏氏と共に，HCF 環（任意の２つの単項イデアルの共通部分が単項イデアルとなる整域）R 上の 2 変数多項式環 R[x,y]上の高階導分の核が R[x,y]でない場合はＲ上１個の元で生成されることを示した。標数零の場合の導分の核に関する同様の結果はＲが体の場合に永田氏と Nowicki 氏により，R が UFD の場合は Berson 氏が与えたが，我々の結果はそれらの結果の一般化となっている。

③整域Ｒ上のｎ変数多項式環Ｓの有理的高階導分Ｄの核のＲ上の超越次数が n-1 以上ならば，Ｄの核の商体とＤをＳの商体上の高階導分に延長したものの核が等しくなることを示した。この結果を用いて，R 上の２変数多項式環の部分Ｒ代数が有理高階導分の核として表わされるための必要十分条件を与えた。

標数零の多項式環の導分や局所べき零導分の核についてはこれまでに膨大な研究成果があるが，正標数の多項式環でも同様の結果が成り立つということはこれまで予想されていなかった。上記の結果は正標数の多項式環でも高階導分や階層的局所有限高階導分を考えることで，標数零の多項式環の導分や局所べき零導分の核に関する結果を拡長できることを示唆している。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① H. Kojima, Open algebraic surfaces with κ=p_g=0 and P_2 >0, Osaka J. Math.（掲載決定），査読有り.

② H. Kojima and N. Wada, Kernels of higher derivations in R[x,y], Comm. Algebra（掲載決定），査読有り.

③ H. Kojima, On the kernels of some higher derivations in polynomial rings, J. Pure Appl. Algebra, vol. 215, 2011, 2512-2514, 査読有り.

④ Y. Ito and H. Kojima, An algorithm for computing the kernel of a locally finite higher derivation up to a certain degree, Colloq. Math., vol. 122, 2011, 21-31, 査読有り.

〔学会発表〕（計７件）

① H. Kojima, Some elementary results on kernels of higher derivations, International conference on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2010 年 12 月 9 日, Indian Institute of Science, Bangalore, India.

② 小島秀雄, 対数的小平次元が 1 となる開代数曲面について，射影多様体の幾何とその周辺 2010, 2010 年 11 月 5 日，高知大学.

③ 小島秀雄, Remarks on kernels of rational higher derivations, アフィン代数幾何学研究集会，2010 年 3 月 4 日，関西学院大学大阪梅田キャンパス.

④ 小島秀雄, Notes on kernels of higher derivations, アフィン代数幾何学研究集会，2009 年 9 月 3 日，関西学院大学大阪梅田キャンパス.

⑤ H. Kojima, Open algebraic surfaces with logarithmic Kodaira dimension one, Conference on Affine Algebraic Geometry, 2008 年 12 月 22 日, Fireflies Intercultual Center, Bangalore, India.

⑥ 小島秀雄, ピカール数１の正規 del Pezzo 曲面について，射影多様体の幾何とその周辺 2008, 2008 年 11 月 1 日，高知大学.

⑦ 小島秀雄, Notes on D-dimensions of algebraic surfaces in any characteristic, アフィン代数幾何学研究集会，2008 年 9 月 4 日，関西学院大学大阪梅田キャンパス.

６．研究組織

(1)研究代表者

小島　秀雄（KOJIMA HIDEO）
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：９０３３２８２４

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：