

機関番号：17401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20740009

研究課題名（和文） 代数的ベクトル束のモジュライの研究

研究課題名（英文） Study of Moduli of algebraic vector bundles

研究代表者

阿部 健（ABE TAKESHI）

熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：90362409

研究成果の概要（和文）：二つの代数的ベクトル束のモジュライ上の一般テータ関数の空間が双対になるという「奇妙な双対性」に関して研究を行った。代数直線上のシンプレクティック束の場合に、曲線が退化するときの双対写像の様子を記述し、それを基にシンプレクティック束の場合の「奇妙な双対性」を証明した。射影曲面上の擬束を考察することにより、射影曲面上のルポティエの「奇妙な双対性」の特殊な場合を証明した。射影曲面上の次数4の一次元層のモジュライ上の一般テータ関数の次元を計算した。

研究成果の概要（英文）：I studied on the strange duality of generalized theta functions on moduli spaces of vector bundles. I described the behavior of the strange duality map for symplectic bundles as the base curve degenerates to a singular curve, and proved the strange duality conjecture for symplectic bundles. By considering quasi-bundles on a projective plane, I proved a special case of Le Potier's strange duality conjecture. I also computed the dimension of generalized theta functions on the moduli spaces of pure one-dimensional sheaves of degree four.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：代数学・代数幾何学

キーワード：ベクトル束、モジュライ

1. 研究開始当初の背景

代数曲線 C 上の直線束のモジュライであるピカル群 $\text{Pic}(C)$ 上にテータ因子がある様に、主 G 束のモジュライ $M(G)$ 上にはその類似の一般テータ因子と呼ばれるものがある。一般テータ因子の冪の大域切断は一般テータ関数と呼ばれ、一般テータ関数のなすベクトル空間の次元は Verlinde の公式で与えられる。ここで、構造群である G やべきを表わすレベル n がさまざまな場合に

Verlinde 数を計算してみると、奇妙な一致があることが分かる。

例えば、 $\text{SL}(r)$ 束のモジュライ上のレベル n の一般テータ関数の次元と $\text{GL}(n)$ 束のモジュライ上のレベル r の一般テータ関数の次元は等しい。これが単なる数の一致ではなくベクトル空間の双対性なのだ、と主張するのが strange duality 予想である。すなわち、Beauville[1]は、 $\text{SL}(r)$ 束のモジュライ上のレ

ベル n の一般テータ関数の空間から $GL(n)$ 束のモジュライ上のレベル r の一般テータ関数の空間の双対に、ベクトル空間の自然な写像を定義して、これが同型であると予想した。

この予想は Belkale[2] と Marian-Oprea[3] によって証明されていた。彼らの証明の手法は、

(イ) 証明を、曲線 C からグラスマン多様体への（然るべき条件を持つ）写像の数を数える enumerative problem に帰着させる。

(ロ) Verlinde 数と Gromov-Witten 不変量の関係を主張する Witten の定理を使う。

と言うものである。研究代表者[4] は、 $r=2$ の場合に上の予想の別証明を与えている。研究代表者の手法は、

(ハ) 特異曲線上の $SL(2)$ 束のモジュライのコンパクト化を用いて一般テータ関数の空間の分解定理を示す。

(ニ) strange duality の写像と分解定理が compatible であることを示す。

と言うものであった。(ハ),(ニ)を用いて曲線の種数に関する帰納法。)

さて、Beauville[5] は、シンプレクティック束に対する strange duality 予想も定式化した。すなわち、曲線の $Sp(2r)$ 束のモジュライ上のレベル n の一般テータ関数の空間から、 $Sp(2n)$ 束のモジュライ上のレベル r の一般テータ関数の空間の双対への線形写像を構成し、同型であると予想した。

研究代表者の第一の研究目標はこの予想を証明することであった。研究代表者は、 $(SL(2), GL(n))$ の場合にうまくいった(ハ),(ロ)の方法のシンプレクティック類似を確立していた。これにより、シンプレクティック束に対する strange duality 予想を3点つき射影直線の場合に帰着することが出来ていた。

[1] A. Beauville: *Vector bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems*. Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), 17-33.

[2] P. Belkale: *The strange duality conjecture for generic curves*. J. Amer Math Soc, 21 (2008), no. 1, 235-258.

[3] A. Marian, D. Oprea: *The level-rank duality for non-abelian theta functions*. Invent. Math. 168 (2007), no. 2, 225-247.

[4] T. Abe: *On $SL(2)$ - $GL(n)$ strange duality*. J. Math. Kyoto Univ. 46 (2006), no. 3, 657-692.

[5] A. Beauville: *Orthogonal bundles on curves and theta functions*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 5, 1405-1418.

[6] T. Abe: *Compactification of the Symplectic Group via Generalized Symplectic Isomorphisms*. Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles, 1-50, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.

2. 研究の目的

(1) 研究開始当初の背景を踏まえ、研究代表者は研究期間内にまず、3点つき射影直線の場合の(方物的)シンプレクティック束に対する strange duality 予想を証明することを目的としていた。一般テータ関数の空間は共型ブロックの空間に同型で、射影直線の場合は比較的具体的に記述できるので、その記述を手掛かりにする。(この部分の議論は幾何というより表現論である。)

(2) 研究代表者はその後、新しい場合の strange duality 予想の発見を試みることを目的としていた。具体的には、上述のように $(SL(r), GL(n))$, $(Sp(2r), Sp(2n))$ の場合に定式化されている strange duality 予想の直交群類似を探することを目的としていた。 $(SL_2, GL_n), (Sp_{2r}, Sp_{2n})$ の場合に成功した(ハ)の議論で本質的に使われるのは、表現論の Howe の duality と言う定理であるが、Howe の duality には GL , Sp 版の他に SO 版もある。従って、strange duality 予想の直交群類似もあると期待するのは妥当な思惑であった。

仮に strange duality 予想の直交群版が定式化できたとして、その証明に向けて研究代表者は次に、特異代数曲線上の SO 束のモジュライのコンパクト化を調べることを苦めとしていた。 Sp 束の場合同様、代数群 SO の「良い」コンパクト化をモジュライとして構成することも必要になる。

(3) さらに発展的研究の方向性としては、次のことを考えていた。

・ strange duality の定式化は当時個別に扱われているが、(例えばルートなどを用いて)

もっとコンセプト的に定式化出来ないか。

・ Belkale や Marian-Oprea の手法の他の場合への類似は出来ないか。

3. 研究の方法

異なる種 G 束のモジュライ上の一般テータ関数の空間が双対であると主張する **strange duality** は、それ自身現象として面白いものであるが、**strange duality** を中心に据えた本研究の目立った特色は、ベクトル束のモジュライの幾何にとどまらず様々な分野と関係してくることである。

実際、一般テータ関数の空間は共型ブロックの空間と同型であるため、表現論に係ってくる。また、モジュライのコンパクト化の際には、代数群のコンパクト化特にスフェリカル多様体のモジュライ論的意味づけも考察することになり、ここでも表現論が現れる。さらに、(イ),(ロ)の手法では、Gromov-Witten 不変量とも関係してくる。この様に、**strange duality** と言う具体的な問題を通して他分野との関係を深めつつある本研究は、数学的にとても有意義な研究である。

その中で、**strange duality** に対して、曲線の退化による一般テータ関数の分解定理と **strange duality** 写像の関係を考察するというアプローチ(ハ),(ニ)が、研究代表者の研究手法であった。

4. 研究成果

(1) シンプレクティック **strange duality**: 本研究期間の前までに、研究代表者は、シンプレクティック束に対する **strange duality** 予想を点付き射影直線上の方物的 Sp 束の場合に帰着していた。研究代表者は、平成 20 年度に、点付き射影直線上のシンプレクティック **strange duality** を証明することが出来た。証明は、当初予定していたように、一般テータ関数の空間と共型ブロックの対応を用いて問題を表現論の問題として捉え、中西・土屋による一般線形群に対する **strange duality** の証明で用いられた論法を用いるというものである。大きな証明の方針は中西・土屋と同じであるが、中西・土屋が証明の鍵の部分でブレード群の表現の規約性を用いているのに対し、本研究者はブレード群の作用を用いずに証明しているため、細部は微妙に異なる。

この結果は、Warwick 大学、北海道大学、数理解析研究所、で行われた研究集会で発表した。また、この結果を論文「Strange Duality for Parabolic Symplectic Bundles on a Pointed Projective Line」にまとめた。

(2) ルポティエの **strange duality**: 研究代表者は、シンプレクティック束に対する **strange duality** の後、直交群束に対する **strange duality** に取り組んだ。モジュライの特異点の様子がシンプレクティック束の場合には generic には正規的であったのに対し、直交群束の場合では正規的にならず、それが障害となり、直交群束に対する **strange duality** への解決には至らなかった。(しかし最近、 SO 束の場合にも **strange duality** が成り立つ状況証拠がはじめており、今後これは研究代表者の研究課題としたい。)

そこで、次に研究代表者は、曲線上の **strange duality** での証明の手法の応用として、射影平面上の層に対するルポティエの **strange duality** に取り組んだ。ルポティエの **strange duality** は、射影平面上の第 1 チャーン類が 0 第 2 チャーン類が n の階数 2 の半安定層のモジュライ上の (d に依る) ある直線束の大域切断の空間と、射影平面上の第 1 チャーン類 d 正則オイラー数 0 の純 1 次元層のモジュライ上の (n に依る) ある直線束の大域切断の空間が双対であるというものである。

研究代表者は、平成 21 年度に、 d が 1 または 2 の場合に、ルポティエの **strange duality** を証明することが出来た。特異曲線上の局所自由でないねじれなし層の類似を曲面上の擬ベクトル束である、と思う類似のもと、曲線上の方物方ベクトル束の類似として曲面上で pinch 構造を持つベクトル束という概念を提案し、変形理論を用いて調べてみると、安定曲線のモジュライの局所構造と擬ベクトル束のモジュライの局所構造が非常によく似ていることが証明の鍵であった。この結果を論文「Deformation of rank 2 quasi-bundles and some strange dualities for rational surfaces」にして発表した。

ルポティエの **strange duality** は、曲線上の **strange duality** の場合とは異なり、双対と予想されている二つのベクトル空間の次元が等しい事すら分かっていない。そこで、研究代表者は、平成 22 年度に、射影平面上の第 1 チャーン類が 3 正則オイラー数が 0 の純 1 次元層のモジュライ空間上の直線束の大域切断の次元を計算した。計算結果は、ルポティエの **strange duality** が成立することを支持するものであった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

1.
著者：阿部 健
論文標題：Deformation of rank 2 quasi-bundles and some strange dualities for rational surfaces
雑誌名：Duke Mathematical Journal
査読：有り
巻：Vol. 155, no. 3
発行年：2010
ページ：577-620

2.
著者：阿部 健
論文標題：Degeneration of the strange duality map for symplectic bundles
雑誌名：Journal für die Reine und Angewandte Mathematik
査読：有り
巻：Vol. 631, no. 3
発行年：2009
ページ：181-220

3.
著者：阿部 健
論文標題：Strange Duality for Parabolic Symplectic Bundles on a Pointed Projective Line
雑誌名：International Mathematics Research Notices
査読：有り
巻：rnn121
発行年：2008
ページ：47

[学会発表] (計7件)

1.
発表者：阿部 健
発表標題：The moduli space of pure one dimensional sheaves with $c_1=4$ and $\chi=0$ on \mathbb{P}^2
学会等名：研究集会「代数幾何の関連する諸分野」
発表年月日：2010年8月31日
発表場所：北海道大学

2.
発表者：阿部 健
発表標題：On strange duality for symplectic bundles
学会等名：研究集会「Eigenvalue and Saturation Problems for Reductive Groups」
発表年月日：2009年5月26日
発表場所：North Carolina 大学 アメリカ

3.
発表者：阿部 健

発表標題：On strange duality for symplectic bundles
学会等名：研究集会「Moduli and invariants in complex analysis and algebraic geometry」
発表年月日：2008年11月26日
発表場所：京都工芸繊維大学

4.
発表者：阿部 健
発表標題：Level-rank duality of conformal blocks of affine symplectic Lie algebra and symplectic strange duality
学会等名：研究集会「表現論と非可換調和解析における新しい視点」
発表年月日：2008年9月16日
発表場所：京都大学数理解析研究所

5.
発表者：阿部 健
発表標題：Strange duality for symplectic bundles
学会等名：研究集会「代数幾何の関連する諸分野」
発表年月日：2008年7月23日
発表場所：北海道大学

6.
発表者：阿部 健
発表標題：On strange duality for symplectic bundles
学会等名：研究集会「Conference on Moduli spaces」
発表年月日：2008年7月8日
発表場所：Warwick 大学 イギリス

7.
発表者：阿部 健
発表標題：Degeneration of the Strange Duality Map for Symplectic Bundles
学会等名：研究集会「moduli 空間と双有理幾何」
発表年月日：2008年6月12日
発表場所：京都大学数理解析研究所

6. 研究組織
(1) 研究代表者
阿部 健 (ABE TAKESHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：90362409

(2) 研究分担者
無し

(3) 連携研究者
無し