

機関番号：14401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740014

研究課題名（和文） 射影空間内の超曲面と直線の代数幾何とホッジ構造

研究課題名（英文） Algebraic geometry of hypersurfaces and lines in projective spaces and Hodge structure

研究代表者

池田 京司（IKEDA ATSUSHI）

大阪大学・大学院理学研究科・特任研究員

研究者番号：40397617

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何、ホッジ構造、3次超曲面

1. 研究計画の概要

射影空間内の超曲面 X と重複度 m 以上で交わる直線全体のなす代数多様体 Y のホッジ構造が、もとの超曲面 X の幾何学的性質をどのように反映しているかを明らかにすることがこの研究の目的である。 Y のホッジ構造が超曲面 X の同型類を類別するかどうかというトレリ型の問題や、 X の Eckardt 点と Y のホッジ構造との関係を解明する。

2. 研究の進捗状況

(1) 3次曲面 X に対し X と重複度 3 以上で交わる直線全体のなす代数多様体 Y について詳しく研究を行った。

① Allcock-Carlson-Toledo は X で分岐する射影空間の 3 重被覆 V のホッジ構造と被覆のガロア群の作用を用いて 3 次曲面のモジュライ空間を研究していたが、本研究において V のホッジ構造と直線の多様体 Y のホッジ構造の関係が明らかになった。

② Y のホッジコホモロジーやその上のカップ積を計算するためのヤコビ環の理論を整備し、 Y のホッジ構造の無限小変形を計算することを可能にした。

③ X が Fermat 型の 3 次曲面や一般の 3 次曲面の場合に、対応する一般型代数曲面 Y の Neron-Severi 格子の構造を決定した。 X 上の Eckardt 点に対応する Y 上の有理曲線と X 上の直線に対応する Y 上の有理曲線で Y の Neron-Severi 群が生成されるかどうかの問題であったが、 Fermat 型の 3 次曲面の場合 Y の Neron-Severi 群はこれらの有理曲線だけでは生成されないことが明らかになった。

④ 3 次曲面 X に直線の多様体 Y のホッジ構造を対応させて定まる周期写像に関するトレリ問題を解決した。

⑤ 3 つの通常 2 重点をもつ 3 次曲面に対する周期写像について、その逆写像を周期領域上の保型関数を用いて具体的に記述する結果を得た。

(2) 3 次曲面に対応する Y の Neron-Severi 格子の計算の一般化として、高次元 3 次超曲面 X の幾何学的性質の一つである Eckardt 点の配置と直線の多様体 Y の代数的サイクルの関係を明らかにした。

(3) 高次元一般次数の超曲面 X に対し直線の多様体 Y のホッジ構造の無限小変形を計算するためのヤコビ環の理論は部分的に出来ているが、 Y のホッジ構造を対応させる周期写像についてのトレリ問題は现阶段で未解決である。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

(理由)

3 次超曲面に対してはその幾何学的性質がどのように直線の多様体 Y のホッジ構造に反映されるかがある程度明らかになったが、一般次数の超曲面に対する直線の多様体 Y のホッジ構造を考えるトレリ型の問題については最終年度の課題として残された。

4. 今後の研究の推進方策

3 つの標準特異点をもつ 3 次曲面の周期写像の逆写像を周期領域上の保型関数を用いて具体的に記述する现阶段の結果を、モジュライ空間の次元がより高い場合に一般化する。これと並行して高次元一般次数の超曲面 X に直線の多様体 Y のホッジ構造を対応させる周期写像の弱大域トレリ問題を解決する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 池田京司, The double cover of cubic surfaces branched along their Hessian,
http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1012/1012.4242v1.pdf, 査読無.
- ② 池田京司, The varieties of tangent lines to hypersurfaces in projective spaces,
http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1012/1012.2186v1.pdf, 査読無.
- ③ 池田京司, The varieties of intersections of lines and hypersurfaces in projective spaces, `Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles' RIMS Kokyuroku Bessatsu, B9, 115-125, 2008, 査読有.

[学会発表] (計6件)

- ① 池田京司, 3次超曲面の Eckardt 点について, 射影多様体の幾何とその周辺 2010, 2010年11月6日, 高知大学理学部.
- ② 池田京司, Nodal cubic surfaces and Eisenstein series, 特異点と多様体の幾何学, 2010年9月18日, 山形大学理学部.
- ③ 池田京司, Nodal cubic surfaces and Eisenstein series, 代数幾何の関連する諸分野, 2010年8月30日, 北海道大学理学部.
- ④ 池田京司, Nodal cubic surfaces and generalized Kummer surfaces, 複素幾何と代数幾何の若手研究集会, 2010年2月19日, 熊本大学理学部.
- ⑤ 池田京司, A period map for cubic surfaces, Hodge 理論と代数幾何学, 2009年6月29日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑥ 池田京司, Periods and geometry of cubic forms, Geometry of singularities and manifolds, 2008年9月13日, 草津セミナーハウス.