

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月26日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740015

研究課題名（和文）非正則ジーゲル保型形式のL関数-局所理論の深化とその大域的応用

研究課題名（英文）L-functions attached to non-holomorphic Siegel modular forms-
Local theory and its global applications

研究代表者

森山 知則 (MORIYAMA TOMONORI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80384171

研究成果の概要（和文）：次数2の非正則ジーゲル保型形式のジーゲル放物型部分群に関するフーリエ展開の基礎理論を整備した。特に、不定符号2次形式に付随する $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ の一般化 Whittaker 模型 (Bessel 模型) の一意性を $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ の様々な標準表現に対して証明した。合わせて、対応する一般化 Whittaker 模型の明示的な積分表示式を $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ の1次元トーラス上で得た。

研究成果の概要（英文）：We study the archimedean local theory of Fourier expansion of non-holomorphic Siegel modular forms of degree 2 along the Siegel parabolic subgroup. We established the multiplicity free theorem for generalized Whittaker models (=Bessel models) of $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ associated with indefinite binary quadratic forms when they arise from various standard representations. We also obtained an explicit integral expression of the corresponding generalized Whittaker functions on a one dimensional torus of $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型的L関数, Fourier 展開,

1. 研究開始当初の背景

多変数の保型形式のL関数の研究は、197

0年代以降、その積分表示法(ゼータ積分)を一つの軸として行われてきている。ところが、正則保型形式や一般線型群 $\mathrm{GL}(n)$ 上の保型形

式に関する研究を除くと、これらのL関数の性質は、その基礎的な部分においてさえ未解明な点が多い。その直接的な理由は、各種のゼータ積分の理論の基礎となる、保型形式のフーリエ展開についての我々の理解が立ち遅れていることにある。また、その遠因は、1980年代以降、研究者の関心が一般の階数の代数群上の保型形式へ向き、個々の代数群の持つ個性に十分な注意を払わずにきた点に求められると考える。

2. 研究の目的

上記の背景から、この状況を打開するには、まず比較的低い階数の代数群上の保型形式について「明確に述べられる結果」を積み重ねるべきであるとの考えに至った。そこで最も手近な多変数保型形式の例として次数2のSiegel保型形式を研究の中心にすえ、そのFourier展開の基礎を整備し、将来の大域的な応用に道筋をつけることを目的とする。中でも不定符号2次形式に付随する一般化Whittaker模型の一意性に対しては、その成立に対して懐疑論もあるので、はっきりさせる。

3. 研究の方法

研究代表者らは以前大域Whittaker模型を持つ次数2のジーゲル尖点形式のスピノールL関数の整型性をいくつかの重要な場合に証明したが、その際にそこで行った実素点におけるNovodvorskyの局所ゼータ積分の計算が、一般化Whittaker模型の存在を与えていることを観察した。この種の観察そのものは、B. GrossとD. Prasadによって、模型の存在・非存在に関するいわゆるGross-Prasad予想に関する論文(Canad. J. Math, 1994)でも利用されているが、研究代表者はこの観察を模型の存在・非存在のみならず、その具体的な

公式を得るうえでも積極的に活用する。

4. 研究成果

(1) 上記のプランに従い、まず以前から研究を行っていた大きな離散系列に属する一般化Whittaker模型の一意性及びその具体的な積分表示式に関する研究を完成させた。その研究の最終段階では、ある4階の合流型一般化超幾何方程式の解の急減少解の一意性が必要となるが、これを方程式のパラメータに依存しない形で証明して用いた。これによって、既存の研究で散見される人為的な条件から解放された形で、 $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ の離散系列表現の一般化Whittaker模型の一意性を確立することができた。なお、これらの結果は、以前から用いられてきた球函数的手法に基づくが、具体的な計算の実行においては $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ 上の「座標系」を適切にとることが肝要であった。この「座標系」の選択においては、上で述べたNovodvorskyの局所ゼータ積分の計算が有効に用いられた。このことは今後、同様の研究を行う上で示唆的であると思われる。

(2) 上記の(1)で述べた研究の基礎付けとして、次数2のジーゲル尖点形式のフーリエ展開の形式化にかかわる基礎を整備した。具体的には、様々な文献に散在していた事実を整理したりばかりでなく、既存の文献には証明が見当たらない事実を証明をつけた。また、次数2のジーゲル尖点形式の大域的なWhittaker模型が存在するためのいくつかの興味深い必要十分条件を与えた。

(3) 次に、上記の研究の過程で $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ の一般化Whittaker模型の一意性が一般の(標準)表現に対しても成立するとの感触を得たので、Siegel波動形式やその変種が生成する表現である主系列表現の場合にも検討

した(成蹊大学工学部 石井卓氏との共同研究)。結果として、この場合にも一般化 Whittaker 模型の一意性が成立することが判明した。ここで、模型の一意性は絡作用素の空間の上限を与える「定量的」な結果ではなく、大域的なフーリエ係数を有限素点からの寄与と無限素点からの寄与に切り分けることを可能とする「定性的」な結果であることに注意する。このように、目的の項で述べた一般化 Whittaker 模型の一意性が広い範囲の標準表現に対して成立することが分かったわけだが、 $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ では無く、 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ においては、一般化 Whittaker 模型の一意性が崩れるであろうことを観察した。これは Gel'fand, Shalika, Yamashita らによって用いられてきたよい対合の存在に依拠する手法が連結な群 $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ においては一般には機能しないことから説明可能と推察され、上記の懐疑論との関係もはっきりした。以上のように、重複度自由定理の成立をめぐる微妙な側面が浮き彫りなり、問題の理解が一層深まった感がある。なお、我々の得た Barnes 型積分による一般化 Whittaker 模型の表示式は、不分岐有限素点における一般化 Whittaker 関数の明示式 (Bump-Friedberg-Furusawa, Israel J. 1997) と合わせることで、当該研究の主眼である保型的 L 関数の解析のみならず、Borel 部分群から誘導した Eisenstein 級数の絶対収束域の外での挙動を制御する上でも有益であると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Tomonori Moriyama
Generalized Whittaker functions on $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ associated with indefinite quadratic forms, Journal of the

Mathematical society of Japan 63 (2011), 1203-1262 (査読有) .

② 森山知則

保型形式の空間と Hecke 作用素, 第 18 回 (2010 年度) 整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集 (2011), 1-20 (査読なし) .

③ 石井卓 森山知則

Uniqueness of generalized Whittaker models for $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ and the outer automorphism group of $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$, 京都大学数理解析研究所講究録 1715 (2010), 121-126 (査読なし) .

④ Tomonori Moriyama

L-functions for $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GL}(2)$: Archimedean theory and applications Canadian Journal of Mathematics 61 (2009), 395-426 (査読有) .

⑤ Taku Ishii, Tomonori Moriyama

Spinor L-functions for generic cusp forms on $\mathrm{GSp}(2)$ belonging to principal series representations, Transactions of the American Mathematical Society 360 (2008), 5683-5709 (査読有) .

⑥ 森山知則

Langlands-Shahidi method 概説, 第 16 回 (2008 年度) 整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集 (2009), 225-248 (査読なし) .

[学会発表] (計 11 件)

① 森山知則

A Fuchsian differential equations with accessory parameters and Zuckermann's tensoring, Blanching Laws, 2012.03.16 Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore (シンガポール) .

② 森山知則

p 進 Poisson 変換による球関数の構成 p 進代数群の表現論, 2012.02.17, 横浜国立大学 (神奈川県) .

③ 森山知則

保型形式の空間と Hecke 作用素
第18回(2010年度)整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」
2010.09.06, 山中温泉 河鹿荘ロイヤルホテル(石川県).

④ 森山知則

Kohnen-Skoruppa の論文(Invent Math, 1988)の紹介, $\mathrm{GSp}(4)$ の数論を中心とした基礎的ワークショップ, 2010.08.04, 大阪大学大学院理学研究科.

⑤ 森山知則

$\mathrm{GSp}(4)$ から $\mathrm{GL}(4)$ への generic transfer の解説, $\mathrm{GSp}(4)$ の数論を中心とした基礎的ワークショップ, 2010.08.03, 大阪大学大学院理学研究科.

⑥ 森山知則

実解析的 Siegel 保型形式の Fourier 展開と保型的 L 関数, 大阪市立大学数学談話会, 2010.06.03, 大阪市立大学大学院理学研究科.

⑦ 石井卓 森山知則

Uniqueness of generalized Whittaker models for $\mathrm{GSp}(2, R)$ and the outer automorphism group of $\mathrm{Sp}(2, R)$, 保型形式・保型表現およびそれに伴う L 関数と周期の研究 (RIMS 研究集会), 2010.01.20 東京大学大学院数理科学研究科.

⑧ 森山知則

Real local counterpart; Problems and Speculations II, ワークショップ 保型表現の分岐理論へ向けて: ε -因子の明示計算, 2009.08.13, 京都大学大学院理学研究科.

⑨ 森山知則

Construction of supercuspidals: prime N case, ワークショップ 保型表現の分岐理論へ向けて: ε -因子の明示計算, 2009.08.10 京都大学大学院理学研究科.

⑩ 森山知則

2次実解析的 Siegel 保型形式とその L 関数, 東北大学代数セミナー, 2009.06.25 東北大学大学院理学研究科.

⑪ 森山知則

Langlands-Shahidi method 概説, 第16回整数論サマースクール「保型 L 関数」, 2008.08.20, 幕張メッセ(千葉県).

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~moriyama/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森山 知則 (MORIYAMA TOMONORI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 80384171