様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22　年　6　月　4　日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：　2008～2009
課題番号：20740021
研究課題名（和文）　非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値とモジュラー形式

研究課題名（英文）　Special values of the spectral zeta function for the noncommutative harmonic oscillator and modular forms

研究代表者
木本　一史（KIMOTO KAZUFUMI）
琉球大学・理学部・助教
研究者番号：10372806

研究成果の概要（和文）：
非可換調和振動子と呼ばれる微分作用素のスペクトルゼータ関数（固有値をまとめて出来る関数）について研究した。その特殊値（変数が正の整数における値）は、いわゆるリーマンゼータ値に（非可換性に由来する）「剰余項」が付いた形になる。この剰余項から定まる高次アペリ型数列の母関数が持つ構造を明らかにし、またアペリ型数列が誘導する多重ゼータ値の変種の計算を行った。

研究成果の概要（英文）：
We have studied the spectral zeta function associated to a differential operator called the noncommutative harmonic oscillator (NCHO in short). Each special value (i.e. the values at integral points) of the spectral zeta is expressed as a sum of a Riemann zeta value and certain terms (remainder terms) involving the structure parameter of NCHO, which is thought to reflect the noncommutativity of the NCHO. These remainder terms induce higher analogue of Apery-like numbers and some variants of multiple zeta values. We found a certain structure among the generating functions of these higher Apery-like numbers, as well as calculate explicitly the multiple zeta values associated to the remainder terms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：非可換調和振動子、スペクトルゼータ関数、特殊値、モジュラー形式

１．研究開始当初の背景

非可換調和振動子とは、いわゆる調和振動子

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2$$

のひとつの一般化（非可換化・高次元化）としてParmeggiani-Wakayama によって導入された、２つの実パラメタ α, β を含む以下のような行列型の微分作用素が定める常微分方程式系である。

$$Q_{\alpha,\beta} = A\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2\right) + J\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\right)$$
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

パラメタが適当な条件を満たすとき、この作用素に対する固有値問題は正の離散固有値のみを持つ（以下、この仮定の下で話を進める)。この固有値の記述が問題となるが、パラメタが特別な場合を除いて一般には（理論的には決定可能であるが）具体的に固有値を求めることはほとんど不可能である。そこで、固有値の全体的な振る舞いを調べるために、非可換調和振動子の固有値たちのディリクレ型母関数

$$\zeta_Q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}$$
$$(0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \text{ は } Q_{\alpha,\beta} \text{ の固有値})$$

として定義されるスペクトルゼータ関数がIchinose-Wakayama によって導入された。

これはパラメタの特殊化で実質的にリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と一致するので、リーマンゼータの変形という見方も出来、実際にスペクトルゼータ関数はリーマンゼータと共通の性質（全平面への有理型接続、自明零点の存在）を持つ。このスペクトルゼータ関数の特殊値を計算することは、それが非可換調和振動子のスペクトルの振る舞いを反映する量であることや、特殊値同士の比較でスペクトルゼータ関数の背後にある対称性を推測する手がかりになることが期待され、興味深い問題であるが、Ichinose-Wakayama によってはじめの二つの特殊値（変数 s の値が２と３での関数値）のみが計算されていた。また Ochiai や Kimoto-Wakayama により、それら二つの特殊値の超幾何型級数による表示が得られていた。その計算過程においてアペリ型数列と呼ばれる数列の母関数が重要な役割を果たす。のみならず、そのアペリ型数列の母関数自身もある合同部分群に対するモジュラー形式と捉えられるなど、それ自身が興味深い対象であることが明らかになりつつあった。

２．研究の目的

以上のような背景の下、以下のことを主たる目的として研究が開始された。

(1) 高次のアペリ型数列の母関数の持つモジュラー性の解明

アペリ型数列自体は、その定義から自然な一般化を持つので、それらの母関数を用いて一般の特殊値が書けるであろうと予想し（実際にはこれだけでは不足であった)、その母関数が持つ（と期待される）モジュラー性の解明、関連してアペリ型数列の合同関係式などについての系統的な記述を与えること。

(2) 高次の特殊値の計算の実行

Ichinose-Wakayama による特殊値 $\zeta_Q(2)$, $\zeta_Q(3)$ の計算結果を一般化すること。すなわちスペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ の $s = 4, 5, 6, \ldots$ における値の（代数関数を被積分関数に持つ）積分表示、アペリ型数列の母関数（ないし超幾何型級数）による表示、(Heun 型の）微分方程式の解関数を用いた contour 積分表示等を与えること。

３．研究の方法

(1) 周辺研究者との議論

本研究課題の対象と関連する研究を行っている、あるいは興味を持ってくれる研究者との議論を行った。

(2) 計算機の援用

アペリ型数列の合同関係式や母関数の満たす（微分方程式などの）関係式を観察するために、計算機による数値実験を積極的に活用した。

４．研究成果

具体的な成果は以下の通り。

(1) スペクトルゼータ関数の特殊値と密接に関係している「高次アペリ型数列」から（いわば多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値の中間に位置するような）交代多重ゼータ値の変種が自然に生じる。これをさらに一般化したものを考え、その母関数を具体的に計算した。また特別な場合の交代多重ゼータ値について、その和の値を具体的に計算した（参照：雑誌論文 1)。これらはそれ自身が興味深い対象（新しい多重 L 値の変種）であり、通常の多重 L 値のような様々な関係式や値の明示公式の探究を今後も進めたい。

(2) 上記の「高次アペリ型数列」の満たす合同関係式について、いくつかの新しい結果と予想を与えた（プレプリント arXiv:0901.0658)。しかしながら、モジュラー性の解明という当初の目的は達成されていないので、続く研究課題において引き続き研究を進めていきたい。また、後述のスペクトルゼータ関数の特殊値公式に現れる剰余項には高次アペリ型数列のさらなる一般化の母関数が現れる。それらに対する漸化式・母関数の構造・合同関係式などについても詳しく調べていきたい。

(3) スペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s)$ の特殊値を一般的に計算することが出来た（プレプリント arXiv:0903.5165)。当初の予想とは異なり、特殊値の表示には「高次アペリ型数列」の母関数だけでは事足りないことが判明した。それら特殊値は「リーマンゼータ値と剰余項の和」

$$\zeta_Q(n) = 2C^n_{\alpha,\beta}\big(\zeta(n,1/2) + R_n(\alpha,\beta)\big)$$
$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}}$$
$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^{-s}}$$

という形をしているが、現時点で得られている剰余項 $R_n(\alpha,\beta)$ の表示は煩雑であり（行列式の形で与えられる有理関数の平方根を被積分関数に持つ多重積分の多重和)、また Ichinose-Wakayama が与えた「ある Heun 型微分方程式の解関数を用いた contour 積分表示」のような表示も得られておらず、さらなる改良が望まれる。

本研究課題で扱った問題たちの研究は、平成 22 年度以降の科研費申請課題（「表現論的構造のパラメタ変形から生じる特殊関数の研究」，課題番号 22540028）においても引き続き取り組み、発展・継承させていきたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① K. Kimoto and Y. Yamasaki : A variation of multiple L-values arising from the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 2503–2515.（査読有り）

〔学会発表〕（計 1 件）

① 木本 一史, 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値について, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会（於・大阪大学), 2009 年 9 月 27 日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

- プレプリント

① K. Kimoto: Higher Apéry-like numbers arising from special values of the spectral zeta function for the non-commutative harmonic oscillator. arXiv:0901.0658
② K. Kimoto: Special value formula for the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator. arXiv:0903.5165

- 研究集会等での講演

① K. Kimoto: Arithmetic aspects of the non-commutative harmonic oscillator. K-Theory, Quadratic Forms and Number Theory Seminars, University College Dublin, 2008 年 10 月
② K. Kimoto: Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator. Institute of Advanced Studies, University of Bologna, 2008 年 11 月
③ K. Kimoto: Arithmetics derived from the noncommutative harmonic oscillator. Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, 九大西新プラザ，2009 年 11 月
④ K. Kimoto: Spectral anomalies in special values of the spectral zeta function associated to the non-commutative harmonic oscillator. Zetas and Limit Laws in Okinawa 2009，沖縄コンベンションセンター，2009 年 11 月

６．研究組織

(1) 研究代表者
木本　一史（KIMOTO KAZUFUMI）
琉球大学・理学部・助教
研究者番号：10372806

(2) 研究分担者
(　　　　)
研究者番号：

(3) 連携研究者
(　　　　)
研究者番号：