

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 9 日現在

機関番号：33704

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740026

研究課題名（和文） トーリック多様体上の中間次元サイクルの研究

研究課題名（英文） Studies on cycles of intermediate dimensions on toric varieties

研究代表者

佐藤 拓 (Sato Hiroshi)

岐阜聖徳学園大学・経済情報学部・准教授

研究者番号：20433310

研究成果の概要（和文）：本研究では、主として、滑らかな射影的トーリック多様体上の2サイクルについて研究を行った。トーリック森理論の2サイクル版を構築することを主要な目的とし、結果として、2サイクルを扇の言葉を用いて組み合わせ論的に記述する方法を得た。また、トーリック多様体上の有効な2サイクルのなすコーンを研究し、特別な場合に、第二チャーン指標が非負になるようなトーリック多様体の分類を得た。本研究と関連して、通常のトーリック森理論に関する結果も幾つか得ている。

研究成果の概要（英文）：In this research, we mainly studied two-cycles on smooth projective toric varieties. Our main purpose is to construct a similar theory to the toric Mori theory for two-cycles, and as a result, we obtained a method to describe two-cycles combinatorially by using the data of the corresponding fan. Moreover, we investigated cones of effective two-cycles on toric varieties, and obtained the classification of toric varieties whose second Chern character is non-negative for certain special cases. In connection with this research, we obtained some results about the ordinary toric Mori theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学, 幾何学

## 1. 研究開始当初の背景

高次元双有理幾何学において、森理論は欠くことの出来ない重要な理論の一つである。森理論においては、射影的代数多様体上の有理曲線が重要であった。曲線のなすコーン、所謂森コーンが非常に重要な役割を果たし、特にその1次元面、すなわち端射線に含まれる有理曲線が主役であり、代数多様体の双有理

幾何学を研究する上で非常に有用で不可欠であった。

その次の理論として、Starr 達は、2サイクル、或は更なる高次のサイクルを主役にして、森理論に類似する理論の研究を始めた。しかしながら、一般の代数多様体について、そのような理論の構築を目指すことは非常に困難であり、離散的な結果が幾つか出ているの

みであった。また、そのような理論を検証出来る例にも乏しかった。

このような状況を鑑み、対象をトーリック多様体に限定して、一般の代数多様体に対する研究の先駆けとなることを目標に、本研究は始まった。トーリック多様体は非常に良い性質を持ち、特にトーリック森理論は高度に完成されている理論であると言える。しかしながら、何の理論も無しに研究、特に計算を進めることは、すぐに分かることであるが、トーリック多様体の話といえども、非常に冗長な計算をしなければならない。このような状況を打開するために、2サイクルを表示する方法の確立も必要となった。

## 2. 研究の目的

高次のサイクルまでを研究の対象としているが、主として、2サイクルに対して、トーリック森理論の次の理論を構築するのが大きな目的である。

研究には双有理幾何学的な側面と、組み合わせ論的な側面がある。双有理幾何学的な側面は、通常の森理論と同様に、有効な2サイクルのなすコーンを研究し、特にその1次元面、所謂端射線と射影的トーリック多様体の収縮射の関係を調べることが重要である。対象をトーリック多様体に限定することで、高次の部分多様体に特有の困難さが緩和されることが期待される。一方、組み合わせ論的な側面では、トーリック多様体上の有理曲線に対応する扇の生成元間の一次関係式、所謂原始的関係で表したように、扇の言葉を使って2サイクルを表現することが重要である。更には、射影的トーリック多様体上での交点数の計算や、高次コサイクルのネフ性の判定等を容易に出来るようにする理論の構築も目指す。

応用として、Starr が定義した、滑らかな射影的トーリック・ファノ多様体であって、その第二チャーン指標が非負であるもの、所謂トーリック・2ファノ多様体の分類も手がける。

また、本研究は通常のトーリック森理論を主要な道具として用いるので、それ自体に関する結果も平行して研究していく。

## 3. 研究の方法

トーリック多様体の一番の利点は、多様体上の色々な計算が明白に出来ることである。本研究では、この利点を活用し、具体例を多数計算、検証することにより、一般的な性質を見出し、理論を構築していく、といったスタイルをとる。

基盤となるのは通常のトーリック森理論である。幾つかの計算により、有効な2サイクルのなすコーンの端射線に対しても、ある種の収縮写像が対応しそうなことが分かって

きているので、通常のトーリック森理論における端射収縮写像の理論は有効である。無論、2サイクル、曲面に含まれる曲線の理論としても、通常のトーリック森理論が重要になることは納得の行くところである。そのためにも、通常のトーリック森理論に関する研究も平行して行う。

前述した通り、トーリック多様体は色々な計算が明白に出来る。それはつまりコンピュータ上に計算を乗せることも比較的容易であるということであり、コンピュータを補助的に使用することも積極的に考えていきたい。

## 4. 研究成果

- (1) 滑らかな射影的トーリック多様体上のトーラス不変な2サイクルを、対応する扇の情報で組合せ論的に表示する方法を確立した。この方法は、Reid や Batyrev による壁関係式や原始的関係式の2サイクルに対する一般化であり、扇の1次元コーンの生成元間の齊次二次関係式によって2サイクルを表示したものである。この二次関係式は、元の2サイクルの滑らかな射影的トーリック多様体上における交点数の情報、すなわち数値的な情報を全て持っており、この二次関係式を見ることにより、例えば、滑らかな射影的トーリック多様体上のトーラス不変な2コサイクルとの交点数が簡単に計算出来る。また、この方法は2サイクルに限らず、もっと高次のサイクルに対しても適用化であることが期待されており、部分的な結果を得ている。その達成のためには、通常の森理論の精密化が必要であり、3次元以上の滑らかな射影的トーリック多様体に対する統一的な理解が必要となり、今後の大きな課題である。
- (2) 滑らかな射影的トーリック多様体に対して、その2森コーン、すなわち有効な2サイクルからなるコーンを考察し、幾つかの滑らかな射影的トーリック多様体の例において、端射線、すなわち1次元面とある種のトーリック収縮写像が対応していることをチェックした。通常のトーリック森理論とは異なり、複数の収縮写像が対応することもある。一般的な性質はこれからの課題である。
- (3) (1)の応用として、低次元の滑らかなトーリック・ファノ多様体について、第二チャーン標数と滑らかなトーリック・ファノ多様体上の2サイクルたちとの交点数を計算し、2ファノ性の判定を行った。この計算過程では、コンピュータを補助的に用いている。更に、滑らかなトーリック・ファノ多様体について、ピ

カーネル数が小さい場合について、同様の計算を行い、トーリック・2ファノ多様体の部分的な分類を行った。この分類過程において、一般の滑らかなトーリック・2ファノ多様体の構造に関する予想も得ており、今後の研究によって明らかになって行くことと思われる。

- (4) 滑らかな射影的トーリック多様体について、ピカール数が低い場合に、更に高次の有効的サイクルのなすコーンを考察した。2サイクルの場合と同様に、収縮写像が対応している現象が見られるが、統一的な結果は得ておらず、研究はまだ始まったばかりである。
- (5) 滑らかな射影的トーリック多様体であって、第二チャーン指標が非負になるような多様体の研究を行った。すなわち、(3)で行った研究から、ファノという仮定を取り除いたものである。トーリック・ファノ多様体の場合と違い、そのような仮定だけでは同型類の個数が有限にはならない。しかし、研究の結果、そのような多様体の構造は幾何的にも意味があるのではないかと、ということが分かってきた。特に、(3)同様、ピカール数が低い場合について、ある種の分類結果を得ている。
- (6) 本研究においては、通常のトーリック森理論に関する結果も重要である。そのような研究結果としては、以下のものがある。
  - ① 3次元のトーリック・フリップの分類を行った。今までに存在した分類より、特異点に課す条件を緩くしている。
  - ② 局所的性質として、滑らかなトーリック・ファノ多様体の相対的バージョンとも言うべきトーリック射を3次元の場合について分類を行った。詳しく述べると、3次元アフィン空間へのトーリック双有理射であり、更にその相対標準束が反ネフであるようなものの分類を行った。有理二重点とも関係しており、分類方法自体も、所謂ADE特異点を意識したものとなっている。
  - ③ 滑らかな射影的トーリック多様体であって、全ての非自明なネフ直線束が巨大になるようなものの分類を行った。この結果に限らず、トーリック多様体は他の代数幾何学に有用な例を構成するのに便利である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- (1) H. Sato, The numerical class of a surface on a toric manifold, *Int. J. Math. Math. Sci.* 2012 (2012), 9 pages. DOI: 10.1155/2012/536475
- (2) O. Fujino and H. Sato, Smooth projective toric varieties whose nontrivial nef line bundles are big, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 85 (2009), 89-94.
- (3) O. Fujino, H. Sato, Y. Takano and H. Uehara, Three-dimensional terminal toric flips, *Cent. Eur. J. Math.* 7 (2009), 46-53.

[学会発表] (計10件)

- (1) H. Sato, Toric manifolds whose Chern characters are non-negative, Pacific National University, Khabarovsk, Russia, International Conference "Toric Topology and Automorphic Functions", 2011年9月5-10日.
- (2) H. Sato, On the classification of toric 2-Fano manifolds, 京都大学理学部, 研究集会「特異点論とそのひろがり」, 2011年8月22-26日.
- (3) H. Sato, Toric Fano manifolds with non-negative second Chern characters, 九州大学数理学研究院, 代数幾何学研究集会 - ファノ多様体と正標数上の話題を中心として -, 2011年2月21-23日.
- (4) H. Sato, Toric Mori theory and Fano manifolds I, II, III, IV (四回連続講演), 大阪市立大学理学部数学教室, Toric Topology with applications in combinatorics, 2010年12月1-3日.
- (5) H. Sato, Cones of effective two-cycles on toric manifolds, Steklov Mathematical Institute of RAS and Moscow State University, The International Conference "GEOMETRY, TOPOLOGY, ALGEBRA and NUMBER THEORY, APPLICATIONS", 2010年8月16-20日.
- (6) H. Sato, Three-dimensional toric morphisms with anti-nef canonical divisors, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, アフィン代数幾何学研究集会, 2010年3月4-7日.
- (7) H. Sato, Two-cycles on toric Fano manifolds, 東北大学大学院理学研究科, 東北復旦代数幾何合同シンポジウム, 2009年11月24-26日.
- (8) H. Sato, On the classification of toric higher Fano manifolds, 北海道大学大学院理学研究科, 研究集会「代数幾何の

- 関連する諸分野」, 2009年9月2-4日.
- (9) H. Sato, トーリック多様体上の中間次元サイクル, 高知大学理学部, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2008」, 2008年11月1日-3日.
- (10) H. Sato, トーリック多様体上の中間次元サイクル, 北海道大学大学院理学研究科, 研究集会「代数幾何の関連する諸分野」, 2008年7月23-25日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 拓 (Sato Hiroshi)  
岐阜聖徳学園大学・経済情報学部・准教授  
研究者番号: 20433310

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号: