

機関番号：13701

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20740028

研究課題名（和文） 特異点を許容する曲面の微分幾何学的研究

研究課題名（英文） Differential geometric study of surfaces with singularities

## 研究代表者

佐治 健太郎 (SAJI KENTARO)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号：70451432

## 研究成果の概要（和文）：

波面のカスプ的嘴、カスプ的唇、カスプ的蝶、臍特異点の判定法をすべて与えた。また、モンド特異点・高次元波面の基本的な特異点に対して具体的に計算できる判定法を与えた。

これらを応用し、疑球面内の曲面と球面内の曲面の双対性の枠組みの中で様々な特異点があられる条件と、曲面の微分幾何学的性質との関係について明らかにした。また、波面の概念を内在的に定式化し、同じ次元間の写像と波面を同時に扱い、様々な写像の位相的性質と特異点の数との関係を明らかにした。

## 研究成果の概要（英文）：

I gave criteria for cuspidal lips, cuspidal beaks, cuspidal butterfly, umbilics of singularities fronts. Furthermore, I gave criteria for Mond singularity and higher dimensional singularities of fronts.

As applications of them, I clarified relationships between singularities and differential geometric properties of surfaces. Furthermore, I gave an intrinsic formulation of fronts. Using this, I gave formulas about numbers of singularities.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：微分トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点、ルジャンドル特異点、波面、曲率、線織面

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初、幾何学研究において特に、部分多様体の微分幾何学、接触幾何学やシンプレクティック幾何学、微分方程式の解、特異点を持つ図形の幾何学、画像処理、幾何光学などにあられる特異性がある微分可能写像の特異点としてとらえられるということが解ってきていた。

その研究に対して、可微分写像の特異点理論を応用するとさらに深く調べることができると思われた。

その研究には、よく現れる特異点に対して、なるべく簡単な特異点の判定法を作る必要があった。それが与えられれば、様々な状況の特異性に関する研究を進展させることができると思われた。

## 2. 研究の目的

微分可能写像の特異点理論を応用し、曲面論に特化して深く研究することが目的である。具体的には、第一に簡単に計算できる特異点の判定法を与え、次にそれを応用して新しい不変量や、新たな研究対象を発見し、研究することが目的である。

## 3. 研究の方法

まずは、特異点論の整備を行う。マザーの割り算定理を精密化し、与えられた集合上で消える関数を割り算で書くという定理を証明する。まずは特異点理論を整備し、使いやすい定理を作っておくというのが本研究を遂行する上での具体的な工夫である。それを利用して曲面のガウス写像や曲率を特異点でも意味のある値として計算できるようにする。それを利用して、特異点のまわりでの関数の振る舞いを明らかにする。また、波面の特異点の判定法を作る。

上記の判定法と割り算定理を利用して、特異点において種々の微分幾何的不変量の振る舞いを具体的に式で書ききることにより、特異点の幾何的意味を考察する。さらに双対性を利用して対応する曲面の特異点の条件とよとの曲面の曲率等の情報の関係を見ることにより、新しい不変量や研究対象を見つける。

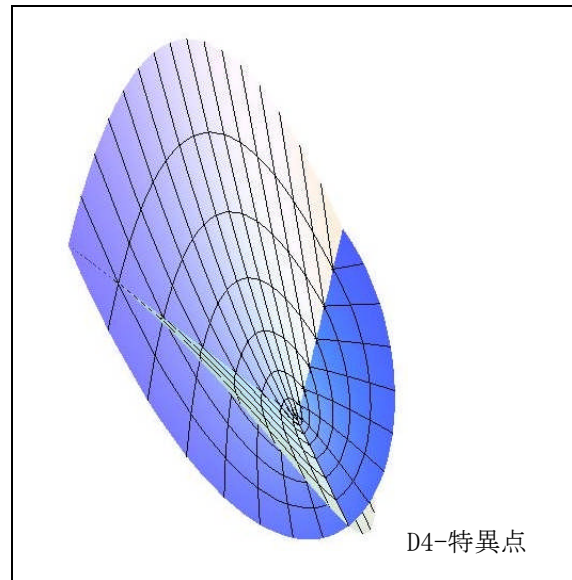
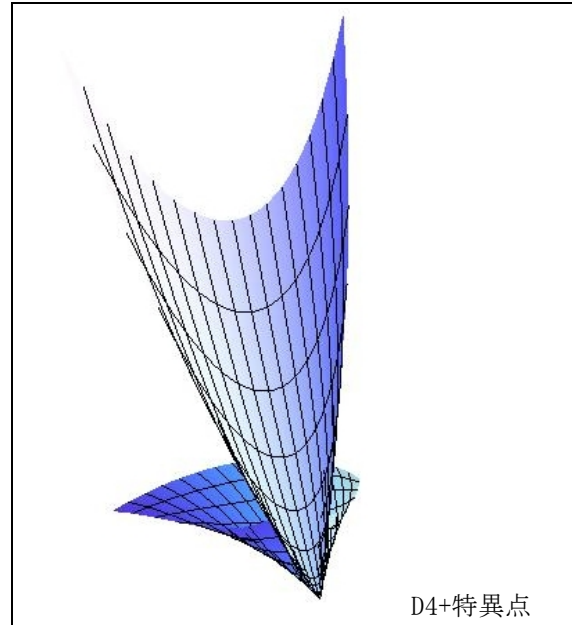
## 4. 研究成果

### (1) 特異点論の深化に関して

波面のカスプ的嘴、カスプ的唇、カスプ的蝶、臍特異点の判定法をすべて与えた。これで、波面の1パラメーター変形にあらわれる特異点にすべて判定法を与えることができたことになる。

カスプ的嘴、カスプ的唇、臍特異点に関しては面積密度関数と呼ばれる波面の基本的な関数である面積密度関数のヘッセ行列の言葉で判定法を書き切ることができ、カスプ的蝶についても面積密度関数の方向微分の言葉で書き切った。

これらは非常に基本的な仕事であり、今後の波面研究を発展させることができると思われる。特に臍特異点に関しては余階数が2の特異点であり、解析が非常に難しいと言われていた。たとえば双曲空間内の平坦曲面においてはそれを作る複素関数が特異点を持つときにあらわれることが指摘されている。その特異点をヘッセ行列式のみを計算するだけでわかることにした意義は非常に大きい。この特異点は図に描くと次のようなものである。



また、モンド特異点と呼ばれるクラス全てに対して具体的に計算できる判定法を与えることができた。さらに、高次元波面に関してA型特異点の判定法を全て与えた。

これらの判定法に関しては超幾何微分方程式の双曲的シュワルツ写像にあらわれる特異点の研究者達に用いられたり、特異点論のコントロール理論への応用を研究している研究者に用いられている。

これらの判定法を使うと、様々な幾何学的状況で特異点が少しの計算で判定できるこのような判定法は以後頻繁に使われることになると思われる。

### (2) 応用に関して

ミンコフスキ空間内の疑球面内の曲面の双対性の枠組みの中で様々な特異点があられる条件を書き、曲面の微分幾何学的性質と

特異点との関係について明らかにした。  
また球面内の双対性に関しても各々の特異点  
があらわれる条件を明らかにした。この中  
で、燕の尾とカスプ的交差帽子との双対性  
の意味をはっきりさせ、カスプ的嘴の自己双  
対性を発見した。

また、波面の概念を内在的に定式化し、同  
次元間の写像と波面を同時に扱えるよう  
にした。さらに、カスプ辺の特異曲率も内  
在的に定式化し、同次元間の写像の特異  
曲率の幾何学的意味を明らかにした。こ  
の設定の下、様々な写像の位相的性質と  
特異点の数との関係を明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者  
には下線)

[雑誌論文] (計 14 件) (以下全て査読有り)

(1) Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and  
Kotaro Yamada, *Ak singularities of wave  
fronts*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.  
**146** (2009), 731–746.

(2) Kentaro Saji, Takeshi Sasaki, and  
Masaaki Yoshida, *Hyperbolic Schwarz map of  
the confluent hypergeometric differential  
equation*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009),  
559–578.

(3) Shyuichi Izumiya, Mariia del Carmen  
Romero Fuster and Kentaro Saji, *Flat  
lightlike hypersurfaces in Lorentz  
Minkowski 4-space*, J. Geom. Phys. **59** (2009),  
1528–1546.

(4) Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and  
Kotaro Yamada, *The geometry of fronts*, Ann.  
of Math. **169** (2009), 491–529.

(5) Kentaro Saji, *Criteria for  
singularities of smooth maps from the plane  
into the plane and their applications*,  
Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229–239.

(6) Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and  
Kotaro Yamada, *Singularities of Blaschke  
normal maps of convex surfaces*, C. R. Math.  
Acad. Sci. Paris **348** (2010), 665–668.

(7) Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and  
Kotaro Yamada, *The duality between  
singular points and inflection points on  
wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010),  
591–607.

(8) Shyuichi Izumiya, Kentaro Saji and  
Masatomo Takahashi, *Horospherical flat  
surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math.  
Soc. Japan **62** (2010), 789–849.

(9) Kentaro Saji, *Criteria for cuspidal Sk  
singularities and their applications*, J.  
Gokova Geom. Topol. **4** (2010), 67–81.

(10) Shyuichi Izumiya and Kentaro Saji, *The  
mandala of Legendrian dualities for  
pseudo-spheres of Lorentz-Minkowski space  
and “flat” spacelike surfaces*, J.  
Singularity **2** (2010), 97–127.

(11) Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and  
Kotaro Yamada, *Coherent tangent bundles  
and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*,  
to appear in J. Geometric Analysis. (Online  
First, 12 November 2010)

(12) Shyuichi Izumiya, Takayuki Nagai, and  
Kentaro Saji, *Great circular surfaces in  
the three-sphere*, to appear in  
Differential Geom. appl.

(doi:10.1016/j.difgeo.2011.02.005)

(13) Kentaro Saji, *Criteria for  $D_4$  singularities of fronts*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 137-147.

(14) Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and Kotaro Yamada,  *$A_2$ -singularities of hypersurfaces with non-negative sectional curvature in Euclidean space*, to appear in Kodai Math. J. (2011)

[学会発表] (計6件)

(1) 佐治健太郎、モンド特異点の判定とその応用、研究集会「トポロジーと写像の特異点」、2009年6月5日、信州大学

(2) 佐治健太郎、Criteria for singularities of fronts and its applications, 研究集会「**International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics**」2009年7月4日、ロシア・スズダリ

(3) 佐治健太郎、Recognition criteria for cuspidal Mond singularities and their applications、研究集会「**Third Japanese/Australian Workshop on Real and Complex Singularities**」2009年9月16日、オーストラリア・シドニー

(4) 佐治健太郎、Fronts to be graphs of continuous functions、研究集会「**空間認識のための特異点論**」、2010年6月2日、伊勢市観光文化会館

(5) 佐治健太郎、Geometry of cuspidal edges、研究集会「**The 11th Workshop on Singularities**」2010年7月26日、ブラジル・サンカルロス

(6) 佐治健太郎、Applications of criteria for singularities -Singularities of ruling maps in the plane-、研究集会「**札幌・長春特異点論セミナー**」2011年2

月18日、北海道大学

[その他]  
ホームページ等  
<http://www1.gifu-u.ac.jp/~ksaji/math/ka ken.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐治 健太郎 (SAJI KENTARO)  
岐阜大学・教育学部・准教授  
研究者番号：70451432

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：