

機関番号：32660

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740032

研究課題名（和文） 標準佐々木計量とAdS/CFT対応

研究課題名（英文） Canonical Sasaki metrics and AdS/CFT correspondence

研究代表者

小野 肇 (ONO HAJIME)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：70467033

研究成果の概要（和文）：本研究では、偏極トーリック多様体の幾何学的不変式論的な安定性、および、その標準ケーラー計量の存在との関係に関して主に次の3つの結果を得た：(1) 漸近的チャウ半安定であるための障害として知られていた積分不変量の族がヒルベルト級数の微分と等価である。(2) 漸近的チャウ不安定なケーラー・アインシュタイン多様体を初めて発見した。(3) チャウ半安定であるための必要条件を、対応する多面体の組み合わせ論の情報により表現した。

研究成果の概要（英文）：In this project, we investigated geometric invariant theoretic (GIT) stability and relations between the existence of canonical Kähler metrics and GIT stability of polarized toric manifolds. Then we proved the following three results: (1) The derivative of Hilbert series has the same information with the family of integral invariants, which is an obstruction for asymptotic Chow semistability defined by Futaki. (2) We found the first example of an asymptotically Chow unstable Kähler-Einstein manifold. (3) We gave a combinatorial necessary condition for Chow semistability.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：チャウ安定性、ケーラー・アインシュタイン多様体、佐々木多様体、ヒルベルト級数

1. 研究開始当初の背景

ケーラー多様体の幾何学を研究する上で、標準的なケーラー計量（例えばケーラー・アインシュタイン計量やスカラー曲率一定ケーラー計量）の存在問題は最も重要な問題の一つである。この問題に関して、研究開始当初から今現在に至るまで、次に挙げる Donaldson-Tian-Yau 予想の解決が多くの研

究者の目標である：「偏極多様体 (M, L) が与えられたとき、 L の第1チャーン類の中にスカラー曲率一定ケーラー計量が存在するための必要十分条件は (M, L) が代数幾何学的な意味で安定であることである。」永年にわたる多くの数学者の研究により、様々な研究手法が編み出され、この予想も着実に解決に向かっていくが、今もなお完全な解決には至って

いないことから見ても、新しい視点からこの予想について調べることは重要であると思われる。

一方、1998年、論文

「The large N limit of superconformal field theories and supergravity, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998)」で、Maldacenaにより、理論物理学において重要かつ新たな概念である「AdS/CFT 対応」が提案された。これはいわゆる「ゲージ・重力対応」の一つであり、5次元 anti de Sitter 空間と5次元 佐々木・アインシュタイン多様体の直積上の IIB 型弦理論と4次元 $N=1$ 超共形場理論の等価性を予想したものである。佐々木多様体とはケーラー多様体の奇数次元への一般化であり、AdS/CFT 対応においては佐々木・アインシュタイン計量の存在問題が重要であった。Martelli-Sparks-Yau は論文

「Sasaki-Einstein manifolds and volume minimisation, Comm. Math. Phys. 280 (2008), 611-673」において、この問題を含む AdS/CFT 対応における予想を解決するための新たな手法(体積最小化)を見出し、研究代表者・二木・Wang・趙は、発表論文④

および論文「Uniqueness and examples of compact toric Sasaki-Einstein metrics, Comm. Math. Phys. 277 (2008), 439-458」において、この体積最小化と、従来から知られていたケーラー幾何における研究手法とを合わせることにより、トーリック佐々木・アインシュタイン計量の存在と一意性の問題を完全な形で解決した。

そこで、この AdS/CFT 対応の研究で現れる手法が Donaldson-Tian-Yau 予想の解決に有効に働くのではないかと考えるに至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は大きく分けて次の2つである：

- (1) 佐々木多様体における標準計量、特に佐々木・アインシュタイン計量の存在問題は、上で述べたように、幾何学的に重要であるだけでなく、AdS/CFT 対応の解明においても重要な役割を演じる。そこで、佐々木・アインシュタイン計量の存在問題を2つの異なるケーラー幾何(「横断的ケーラー構造」と「ケーラー錐構造」)を通して研究し、さらに AdS/CFT 対応の数学的な理解を得ることを目的の一つとした。
- (2) Martelli-Sparks-Yau による考察や研究代表者・二木・Wang・趙の結果に見られるように、AdS/CFT 対応の研究から現れた新しい発想は、今までの手法では得られなかった、標準ケーラー計量の存在問題解決へのアプローチを与える。そこで、このように AdS/CFT 対応

の研究に基づいた、Donaldson-Tian-Yau 予想解決への新たなアプローチの可能性を探ることを目的の一つとした。

3. 研究の方法

まず、研究対象を偏極ケーラー多様体に絞った。ただし、それらを取り扱う手法として、AdS/CFT 対応の研究から現れる新しいアプローチを選んだ：偏極ケーラー多様体を佐々木構造の変形空間の中で動かし、そこから得られる情報を用いて、与えられた偏極多様体上に標準ケーラー計量が存在するための条件や代数幾何的安定性について研究した。この方法は、偏極多様体の幾何を調べる従来の手法からみると超越的であり、佐々木多様体にも適用可能であるという点で優れている。

また、出来るだけ一般性を持った形で結果を得ることが当然望ましいが、本研究では、具体的計算が出来、かつ、多くの例が得られる対象として、偏極トーリック多様体に限定した。その結果、組み合わせ論の結果やコンピュータを用いて様々な例について検証可能となった。

4. 研究成果

一言で言うと、本研究の成果は次のようにまとめられる：偏極トーリック多様体に対して、Martelli-Sparks-Yau による体積最小化を一般化し、それを用いて、Donaldson-Tian-Yau 予想に関連した未解決問題の1つを解決した。

次に、研究成果の詳細を挙げる。

- (1) 発表論文③：スカラー曲率一定ケーラー計量の存在の障害として二木不変量がある。それは様々な形で一般化されたが、その一つとして、論文

「Asymptotic Chow semi-stability and integral invariants, Intern. J. Math., 15 (2004), 967-979」において二木により導入された偏極多様体上の積分不変量の族が知られている。これは、偏極多様体が漸近的チャウ不安定であるための障害を与える。しかしながら、上述論文においては、この積分不変量の族が本質的に二木不変量を超える情報を持つかどうかには答えることは出来なかった。

一方、Martelli-Sparks-Yau による「佐々木・アインシュタイン計量の体積最小化」とは、佐々木幾何を通じた、二木不変量の新たな特徴付けであると解釈できる：佐々木・アインシュタイン計量は佐々木計量の空間上の体積汎関数の臨界点であり、佐々木・二木不変量(二木不変量の佐々木多様体の場合への一般化)はこの体積汎関数の第一変分に等しい。また、佐々木計量の空間上の体積汎

関数はヒルベルト級数の主要項の係数により求まる。つまり、佐々木・二木不変量はヒルベルト級数の主要項の係数の第一変分に等しいということになる。(この解釈においては「佐々木計量の空間」の中で変形することが本質的であり、複素構造(偏極多様体の構造)を固定して考える従来の手法から見るとある意味超越的な新しい方法である。)そこで、素朴な疑問として、「ヒルベルト級数の主要項以外の係数の第一変分はどのような情報を持つのだろうか?」という問題が生じた。論文③では、トーリックファノ多様体において、ヒルベルト級数の第一変分が上述の積分不変量の族と同等な情報を持っていることを、同変指数定理を用いて示した。これは、体積最小化の一般化と考えられる。また、トーリックファノ多様体のヒルベルト級数は対応する凸多面体の組み合わせ論的データのみで原理的に計算可能であり、3次元トーリックファノ多様体(18個の同値類が存在する)に関して計算した結果、そのうちのいくつかの例において、積分不変量の族は二木不変量とは独立な情報を持つことが分かった。

- (2) 発表論文①: Donaldson-Tian-Yau 予想に現れる代数幾何的な安定性の最有力候補は、今現在、K-安定性と呼ばれるものである。しかしながら、その他の代数幾何的な安定性もスカラー曲率一定ケーラー計量の存在と関連があることも知られていた。例えば、スカラー曲率一定ケーラー計量の存在が、漸近的チャウ安定性と呼ばれる幾何学的不変式論の意味での安定性を導くことが、論文

「Scalar curvature and projective embeddings. I, J. Diff. Geometry. 59, no. 3 (2001) 479-522」において Donaldson (自己同型群が有限群の場合)により、論文

「An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds I, Invent. Math. 159, no. 2 (2005) 225-243」において 満洲 ((1)で挙げた積分不変量の族が消える場合)により証明されていた。その他の代数幾何的な安定性を考えた場合でも、今まで知られていたスカラー曲率一定ケーラー多様体は全て安定であった。

論文③において、漸近的チャウ安定ではない7次元トーリックケーラー・アインシュタイン多様体が存在することを示した。これは、標準ケーラー計量を許容するが、代数幾何的に不安定な多様体の初めての例である。

具体的な証明方法は以下の通りである:

- ① 論文「Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Adv. Math. 188 (2004), 87-103」において、Wang-Zhu は、トーリックファノ多様体上で、ケーラー・アインシュタイン計量が存在することと、その二木不変量が消えることが同値であることを示した。したがって、二木不変量は消えるが、漸近的チャウ半安定性の障害である積分不変量の族が消えないトーリックファノ多様体が存在すれば、それは漸近的チャウ不安定なケーラー・アインシュタイン多様体である。
- ② 発表論文③の結果を用いて、積分不変量の族を計算することが出来、その結果、ある7次元トーリックファノ多様体について、二木不変量は消えるが積分不変量の族が消えないことを確認した。(なお、6次元以下のトーリックケーラー・アインシュタイン多様体は全て漸近的チャウ安定であることも同様に確認出来る。)

- (3) 発表論文②: 論文③は主に「体積最小化の一般化」としての側面に主眼を置いたため、ファノではない場合の取り扱いや、そもそもなぜヒルベルト級数の微分が漸近的チャウ半安定性の障害として現れるのかがあまり明確ではなかった。論文②では、偏極トーリック多様体のチャウ半安定性を幾何学的不変式論に基づき正攻法で調べることでこれらの問題を解決した。

まず、偏極トーリック多様体は整 Delzant 多面体と呼ばれるある種の整凸多面体と対応がつく。また、偏極トーリック多様体のチャウ多面体は対応する Delzant 多面体の組み合わせ論的情報により定まる secondary 多面体と呼ばれるものに等しいことが知られている。偏極トーリック多様体がチャウ半安定であるとき、幾何学的不変式論における Hilbert-Mumford 判定法より、チャウ多面体=secondary 多面体は原点を含む。この条件から、次のような偏極トーリック多様体がチャウ半安定であるための必要条件を得た:「偏極トーリック多様体 (M, L) がチャウ半安定であるとき、対応する Delzant 多面体 Δ 内の整数点の平均と Δ の重心は等しい。」

この結果は、トーリック幾何、および、凸多面体の整数点に関する良く知られた結果を組み合わせることで、次のように応用される。 (M, L) を偏極多様体とし、対応する Delzant 多面体を Δ と書く。このとき、各自然数 i に対して、偏極トーリック

多様体 (M, L^i) は Delzant 多面体 $i \Delta$ に対応する。また、 $i \Delta$ の整数点の平均は i に関するベクトル値有理関数で、その $i \rightarrow \infty$ における極限が Δ の重心に等しい。 (M, L) が漸近的チャウ不安定であることは、この有理関数が定数関数であることを導き、その障害が実は積分不変量の族である。また、 (M, L) のヒルベルト級数の第一変分は $i \Delta$ の整数点の平均の母関数であることがわかり、論文③の主結果を再現することが出来る。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Hajime Ono, Yuji Sano, Naoto Yotsutani, An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature, Annales de l'Institut Fourier, 査読有、2011 年、掲載予定
- ② Hajime Ono, A necessary condition for Chow semistability of polarized toric manifolds, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有、2011 年、掲載予定
- ③ Akito Futaki, Hajime Ono, Yuji Sano, Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Advances in Mathematics, 査読有、226 巻、2011 年、254-284
- ④ Akito Futaki, Hajime Ono, Guofang Wang, Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, Journal of Differential Geometry, 査読有、83 巻、2009 年、585-635
- ⑤ 二木昭人, 小野肇, Einstein 計量と GIT 安定性、数学、査読有、60 巻、2008 年、175-202

[学会発表] (計 9 件)

- ① 小野肇、偏極トーリック多様体のチャウ不安定性について、日本数学会 2010 年度秋季総合分科会、2010 年 9 月 22 日、名古屋大学
- ② Hajime Ono、Algebraic-geometric stability of polarized toric manifolds、第 6 回日中友好幾何学研究集会、2010 年 9 月 4 日、西北大学 (中国・西安)
- ③ 小野肇、偏極トーリック多様体のチャウ不安定性について、第 57 回幾何学シンポジウム、2010 年 8 月 8 日、神戸大学
- ④ 小野肇、佐々木・アインシュタイン幾何の基礎 (ケーラー錐の視点から)、広島幾何学研究集会、2009 年 10 月 9 日、広島大学

- ⑤ 小野肇、漸近的 Chow 不安定なケーラー・アインシュタイン多様体、量子化の幾何学 2009、2009 年 9 月 18 日、早稲田大学
- ⑥ Hajime Ono、Hilbert series and obstructions to asymptotic Chow semistability, East Asian Symplectic Conference 2009、2009 年 5 月 6 日、台北・Institute of Mathematics, Academia Sinica
- ⑦ 小野肇、Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability、日本数学会 2009 年年会、2009 年 3 月 28 日
- ⑧ 小野肇、Variation of Reeb vector fields and its applications、微分幾何学と幾何解析、2009 年 3 月 10 日、大阪市立大学
- ⑨ Hajime Ono、The existence of toric Sasaki-Einstein metrics, Perspectives in Geometric Analysis、2008 年 10 月 30 日、北京大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等：なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小野 肇 (ONO HAJIME)
東京理科大学・理工学部・講師
研究者番号：70467033

(2) 研究分担者：なし

(3) 連携研究者：なし