

機関番号：12608

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740033

研究課題名 (和文) コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題と変形問題

研究課題名 (英文) Existence problem and deformation of compact Clifford-Klein forms

研究代表者

吉野 太郎 (YOSHINO TARO)

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：20447890

研究成果の概要 (和文)：

本研究の当初の目的は Clifford-Klein 形の変形空間を計算することであった。しかし、この空間は多くの場合に非ハウスドルフ空間となってしまう、その空間を直感的に捉えることは難しいことが後の研究で分かった。そこで、そのような非ハウスドルフ空間を直感的に捉える為に、位相的ブローアップという手法を確立した。この手法は代数多様体の特異点の解消に似た手法であり、これを非ハウスドルフ空間に適用することで、ハウスドルフ空間を得ることが出来る。得られたハウスドルフ空間は元の空間の位相情報の多くを持っている。特に、前述の Clifford-Klein 形の変形空間として現れる位相空間に対しては、この手法で得られる有限個のハウスドルフ空間から、元の変形空間の位相を完全に復元することができることが分かった。

研究成果の概要 (英文)：

At first, I had planed to calculate deformation spaces of Clifford-Klein forms. However, I found that such deformation spaces are non-Hausdorff in many cases, and it is not easy to get an intuition of the deformation space.

In order to understand such non-Hausdorff spaces, I have introduced a method 'topological blow-up'. This method is similar to the blow-up for algebraic varieties. Applying this method for a non-Hausdorff space, we obtain a Hausdorff space. This Hausdorff space has much information about the topology of the original non-Hausdorff space. Especially, if we apply it for deformation spaces of Clifford-Klein forms, we can obtain complete information on the topology of the deformation space from the blow-upped spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：非リーマン等質空間, 不連続群, Clifford-Klein 形,

位相的ブローアップ, 変形空間, 非ハウスドルフ空間, Lipsman 予想の反例

1. 研究開始当初の背景
空間の変形問題は古くからよく研究されて

いるテーマであるが、その多くはリーマン多様体を対象としている。それに対し、非リー

マン多様体の変形問題は小林俊行氏が Clifford-Klein 形を定義しその変形問題を提唱してから、ようやく問題意識が芽生えてきた状況であった。但し、実際に計算されている例は多くなく、具体的な非リーマン多様体に対し変形空間が決定されている例は小林-Nasrin による一例のみであった。

2. 研究の目的

研究開始当初の研究目的は、多くの変形空間を計算し、Clifford-Klein 形の変形問題に多くの具体例を提供することであった。しかし、以下で述べる理由により途中で研究目的を変更し「変形空間を計算するための道具を揃える」こと、より詳しく言えば「非ハウスドルフ空間を記述する手法を確立すること」とした。

3. 研究の方法

低次元の Clifford-Klein 形の場合、その変形空間が自然に多様体の構造を持つことが多い。一方、高次元の場合には、変形空間が多様体の構造を持たないどころかハウスドルフ空間にすらならないことさえある。

そこで、研究開始当初は研究方針として「非ハウスドルフ空間を避けて、変形空間がハウスドルフとなる場合のみ扱う」という事を考えていた。

4. 研究成果

研究の初年度に Sfax 大学の Baklouti 教授との共同研究により次の 2 点が分かった。

結果 1. 高次元の Clifford-Klein 形では、変形空間が非ハウスドルフ空間となることが当初想像していたよりも多い。

結果 2. 変形空間が非ハウスドルフ空間とな

る場合でも、その空間はさほど悪い空間ではない。

その為、当初の予定通り「非ハウスドルフ空間を避けて」いては、扱う対象がだいぶ限られてしまう。そこで、変形空間が非ハウスドルフ空間となる場合も視野に入れて計算を行うこととし、次のような問題に取り組むことにした。

問題 1. 変形空間が非ハウスドルフとなる場合に、その空間を記述する手法を確立せよ。

実際、変形空間が非ハウスドルフとなる場合でも、その殆どの部分はハウスドルフ的であり、僅かな薄い部分集合が全体のハウスドルフ性を崩しているという状況となっている。従って、その薄い部分集合をうまく記述することが出来れば、その空間の非ハウスドルフ性を捉えることが出来る。以下、ハウスドルフ性を崩している薄い部分集合を「傷」と呼ぶことにする。

問題 1 に対する解として、私は空間の情報を失うことなく、傷を解消する方法を考案した。これは代数的多様体における特異点の解消のアナロジーと言える操作であり、位相的ブローアップと名付けた。この成果は次の通りである。

結果 3. 任意の位相空間に対し、位相的ブローアップという操作を定義できる。

結果 4. 元の空間が局所コンパクトならば、それを位相的ブローアップした空間はハウスドルフな局所コンパクト空間となる。

結果 5. 元の空間が局所コンパクトならば、位相的ブローアップした空間と傷の情報から元の空間を復元する事ができる。

結果 5にあるように、ブローアップした空間と傷から元の空間を復元できる。しかし、一般の非ハウスドルフ空間では傷自体が直感的に捕らえにくい空間であることが多く、ブローアップが理解の役に立つとは言いがたい。

一方、Clifford-Klein 形の変形空間として現れる位相空間に話を限ると、傷が元の空間に比べて小さい。そして、傷自体に位相的ブローアップを適用することで、さらに小さい傷を得ることが出来る。さらに、この操作を有限回繰り返すことで、最終的には傷をなくしてしまうことが出来る。従って、この過程で得られる有限個のハウスドルフ空間の組から元の空間を完全に復元することが出来る。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 件)

Taro Yoshino, Topological blow-up and discontinuous groups, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (25) 2010, 34-37. (査読無し)

[学会発表] (計 件)

Taro Yoshino, “Topological blow-up”, Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces 2010/11/25. (オランダ)

Taro Yoshino, “Topological blow-up and discontinuous groups”, Representation

Theory and Harmonic Analysis
2010/11/14-11/20. (ドイツ)

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

○取得状況 (計◇件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉野 太郎 (YOSHINO TARO)

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号 : 20447890

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：