様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　3 月 31 日現在

機関番号：32660
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008～2011
課題番号：20740034

研究課題名（和文）　正則円板の族と不定値計量の幾何学に関するツイスター理論の研究

研究課題名（英文）　Research for the twistor theory concerning families of holomorphic disks and geometry of indefinite metrics

研究代表者
中田　文憲（NAKATA FUMINORI）
東京理科大学・理工学部・数学科・助教
研究者番号：80467034

研究成果の概要（和文）：正則円板の属を用いたツイスター対応において，新しい一般論・簡約理論・例の構成に関する結果が得られた．本研究において，双曲型偏微分方程式と積分変換に関する新しい事実や，既知の事実との関連が新たに発見されたが，これは不定値計量の幾何学において今後研究すべき課題が多く存在することを示唆しているといえる．本研究の成果は今後不定値計量の幾何学を展開するうえでの，ひとつの指針を与えるものといえる．

研究成果の概要（英文）：New general theories, reduction theories and many examples are established in the field of the theory of twistor correspondence concerning with families of holomorphic disks. We obtained new results on the theories of hyperbolic PDEs and integral transforms, and we found unknown relations between twistor theory and these theories. Such relations give new insights to the theory of indefinite geometries. The results in this research give a new way to develop indefinite geometries.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何学・複素幾何学・ツイスター理論・波動方程式

１．研究開始当初の背景

(1) LeBrun-Mason 理論の誕生

LeBrun と Mason により，正則円板の族を用いた新しいツイスター対応が開発され，特に不定値計量に関する一般論が構成された．またベクトル束の幾何に関する同様の対応も，典型的な場合について Mason により与えられていた．これらを発展させる課題として，以下のものが考えられた：

・LeBrun-Mason の結果の高次元化
・より多様なツイスター空間への一般化
・より広いケースへの Mason の結果の拡張

(2) ツイスター理論の手法

Hitchin により，複素解析的なカテゴリーでの幾つかのツイスター対応のバージョンが与えられており，また Dunajski-West などによって不定値自己双対共形構造に関する簡約理論が研究されていた．これらの理論と LeBrun-Mason 理論を結びつけることで新たな理論の展開が望まれた．具体的な

課題は以下が考えられた：
・Einstein-Weyl 構造に関する LeBrun-Mason 型理論の構築
・LeBrun-Mason 型ツイスター対応における簡約理論の展開
・これらを踏まえたさらなる一般化
(3) 不定値計量の幾何の開拓
以上の(1)(2)を通して，不定値計量の幾何学にこれまでに無い理論が展開できると期待された.

２．研究の目的
以下の項目の研究を通して，不定値計量の幾何学を中心とする，新しく広大な理論の片鱗を示す結果を得るところまで，研究を進める.
(1) 簡約理論の確立
二次元と四次元の LeBrun-Mason 対応の間の簡約理論の一般論を構築する.
(2) 高次元化
(1) を踏まえ高次元の LeBrun-Mason 型対応を順次作り出す方法を確立する
(3) 特異性の理論
特異性のある状況へ LeBrun-Mason 対応を拡張する.
(4) 広義の一般化に関する研究
Einstein-Weyl 構造に関する LeBrun-Mason 理論など，簡約理論の手法を用いて新しいタイプのツイスター理論を構築する.

３．研究の方法
平成 20 年度は，二次元と四次元およびその関係に関する理論を研究し，平成 21 年度以降はその結果を応用して高次元化等の問題に取り組む.
研究内容を以下の具体的なステップに細分化し，研究の効率化を図るとともに，様々なアプローチを用意する事で，研究が計画通り進まない時には研究項目の順番を変える等，柔軟な対応ができるようにする.
(1) Mason の定理の二次元版
(2) LeBrun-Mason 対応の間の簡約理論の一般化
(3) （四次元における）Mason の定理の一般化
(4) （四次元の次の）高次元の LeBrun-Mason 対応とその簡約理論
(5) Mason の定理の高次元化
(6) 高次元の一般論
(7) 特異性の研究
(8) Einstein-Wyle 構造に関する LeBrun-Mason 型対応の定式化と証明
(9) LeBrun-Mason 対応のさらなる拡張

また，関連分野の研究者・大学院生などとのセミナーを積極的に開催し，活発な意見交換が行われるよう環境を整える.

４．研究成果
(1) Einstein-Weyl 構造に関する理論
正則円板の族と微分幾何的構造の対応を与える LeBrun-Mason 型ツイスター理論については，これまでに二種類の対応が知られていたが，これらに続く第三の LeBrun-Mason 型理論の構築を行った．ここでは，ツイスター対応のうち片側の対応の構成に成功し，また，このとき重要となる，Weyl 多様体上の大域的性質を見出し，spacelike-Zoll 性と名付けた．その後 LeBrun-Mason により，より一般的な形での同様の対応が証明されたが，本研究の手法がより具体的である点，spacelike-Zoll 性に注目した点などの重要性はかわらない.

(2) 自己交叉を許した理論
本田宣博氏との共同研究により，ツイスター曲線が自己交叉を持つ場合のミニツイスター対応の理論を構築した．その際，上記(1)を通して得られた Einstein-Weyl 構造に関する知識が大いに役立った．この研究の結果，「三次元の Severi 多様体であって有理曲線をパラメトライズするものは，常に複素 Einstein-Weyl 構造を持つ」という非常にすっきりした定理が得られ，この結果やその具体例についてまとめ，論文として発表した．この共同研究においては，本田氏が複素幾何・代数幾何的側面を主に担当し，報告者が微分幾何的側面を主に担当，定期的なセミナー開催により，研究を進めた.

(3) ３次元ドジッター空間上のモノポールと簡約理論
上記 (1)，(2) の研究を踏まえ，モノポール方程式の解を用いた，LeBrun-Mason 対応の簡約理論を研究し，以下の四つの結果を得た:
① ３次元ドジッター空間上の波動方程式の一般的な解（正確にはある種の境界条件をみたすもの）が，ラドン変換型の積分変換を用いて得られることを示した.
② ３次元ドジッター空間上の（abelian な）モノポール方程式の解が，ラドン変換型の積分変換を用いて得られることを

示した．さらに，（境界条件をみたす）モノポール解のゲージ同値類は，二次元球面上の関数と一対一に対応することを示した.
③ S^2xS^2 上の不定値自己双対計量が，３次元ドジッター空間上のモノポール解から構成できることが知られているが（Tod-鎌田計量），こうして得られる計量は LeBrun-Mason 理論において重要な Zollfrei 条件をみたすことを示し，対応するツイスター空間を具体的に与えた.
④ 上記のツイスター空間において，ある臨界条件を満たさないとき，ツイスター対応は破綻するという現象を捉えた.

特に，波動方程式の解の表示に関する結果は，それ自体はツイスター理論と関係なく論ずることができる内容でありながら，ツイスター理論なしには発見しがたいものであり，有益な「応用」であるといえる.

(4) 例外ホロノミーをもつ Riemann 多様体に関する LeBrun-Mason 型理論の研究

S. Salamon や R. Bryant による文献のサーベイを行い，対応する LeBrun-Mason 型理論の構築の可能性を探った．その結果,目的の理論を展開できる可能性と，その将来性を見出すに至ったが，これを実現するためには「特異性の理論」を確立しておく必要性があると判明し，現段階ではその本格的な研究には手を付けていない．この方向の研究は今後の大きな課題といえる.

(5) Joyce 計量とその簡約の理論

不定値版の Joyce 方程式の解からノンコンパクト多様体上の不定値 Einstein-Weyl 構造を構成し，また，これが実現するための臨界条件について研究した．おもな内容は以下の通りである:
①不定値版の Joyce 方程式の解が，波動方程式の回転不変な解と１：１に対応していること，その解が常に積分表示を用いて表示できることを証明した.
②次数２の Hirzeburch 曲面に関し，その上の正則円板の族の変形の理論の構築に対する研究.
③上記を関連付ける LeBrun-Mason 型対応の構築に対する研究.

以上の内容については，関数の微分可能性や，無限遠でのふるまいについてさらに研究を深めるべき余地が残っており，未完成である．なお，これらの内容は上記の例外ホロノミーの理論の簡易版と位置づけることもでき，その研究のための一里塚となるものであると考えられる.

(6) 四次元ミンコフスキー空間の変形とツイスター対応

上記(5)の研究を進めるにあたり，簡約理論についてさらに研究する必要が生じたため，本年度後半はその研究をおこなった.具体的には，平坦な四次元ミンコフスキー空間と群作用を考え，その変形で得られる自己双対空間について，ツイスター対応を構成した．具体的な成果として以下が挙げられる：
①このツイスター対応が，Radon 変換と波動方程式の理論に関する既知の結果を用いて記述されることを示した.
②コンパクト多様体上の LeBrun-Mason 理論の場合には，Zollfrei 性という強い条件を仮定する必要があった　のに対し,今回のケースでは急減少性という比較的扱いやすい仮定をおけば対応が記述できることを見出した.
③二次元の円柱上の積分として波動方程式の解が得られるという，シンプルな幾何的応用が得られた.

この結果はコンパクト性から離れたところに豊かな世界が広がっていることを示す最初の結果とみることができ，今後の研究へと繋がる第一歩であるといえる.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

(1) Fuminori Nakata, Wave equations and the LeBrun-mason correspondence, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有，掲載決定
(2) Nobuhiro Honda, Fuminori Nakata, “Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure”, Annals of Global Analysis and Geometry, 査読有，39, 2011, 293-323
(3) Fuminori Nakata, “A construction of Einstein-Weyl spaces via LeBrun-Mason type twistor correspondence”, Cmmunications in Mathematical Physics, 査読有，289，2009，663-699

〔学会発表〕（計 11 件）

(1) 中田文憲，「波動方程式と LeBrun-Mason 対応について」，第 57 回幾何学シンポジウム，2011 年８月８日，神戸大学

(2) 中田文憲,「LeBrun-Mason 対応と不定値計量の幾何学について」, 平成 22 年日本数学会年会(特別講演), 2010 年 3 月 25 日, 慶応大学.

(3) Fuminori Nakata, “Wave equation, Funk transform, and the LeBrun-Mason twistor theory”, 国際研究集会『Workshop on Integral Geometry and Group Representations』, 2009 年 7 月 22 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス

(4) 中田文憲, 「３次元 Severi 多様体上の Einstein-Weyl 構造」, 第 56 回幾何学シンポジウム, 2009 年 8 月 31 日, 佐賀大学

(5) Fuminori Nakata, “LeBrun-Mason type twistor correspondence for Einstein-Weyl structures”, 国際研究集会『Geometry, Integrability, and Twistor Theory』, 2008 年 6 月 25 日, Cambridge Univ. UK

６．研究組織

(1)研究代表者

中田　文憲 (NAKATA FUMINNORI)

東京理科大学・理工学部数学科・助教

研究者番号：80467034

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし