

## 自己評価報告書

平成23年4月1日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20740037

研究課題名(和文) ミラー対称性とブレン・タイリング

研究課題名(英文) Mirror symmetry and brane tiling

研究代表者

植田 一石 (UEDA KAZUSHI)

大阪大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：60432465

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素多様体、シンプレクティック多様体

## 1. 研究計画の概要

ホモロジー的ミラー予想とそれに関わる諸分野の研究を行う。ミラー対称性は理論物理学の超弦理論に由来する数学的な現象であり、ある空間の複素幾何学と別の空間のシンプレクティック幾何学の間には不思議な関係があることを指す。ホモロジー的ミラー予想はミラー対称性に関わる予想の中でも最も基本的なものとして Kontsevich によって提案されたもので、由来の全く異なる二つの三角圏が同値になることを主張する。ブレン・タイリングはこの二つの三角圏の仲立ちをする組合せ論的な対象であり、ミラー対称性のみならずトーリック幾何や多元環の表現論、統計物理学などの様々な話題と関係している。本研究では、ホモロジー的ミラー予想への応用を念頭に置きつつ、ブレン・タイリングの代数的、幾何的および組合せ論的な側面について調べるとともに、ブレン・タイリングの概念を高次元へ拡張することによって、ホモロジー的ミラー予想の成立する高次元の例を作ることを目指す。

## 2. 研究の進捗状況

(1)ブレン・タイリングの様々な側面について、石井亮氏および二木昌宏氏と共同で研究を行った。

①代数幾何的側面については、Gulotta によるアルゴリズムと特殊 McKay 対応を用いることによって、任意の2次元のトーリック弱 Fano スタックに対して対応するブレン・タイリングを与えることができた。また、ブレン・タイリングに付随する簇の表現のモジュライ空間を用いた幾何学的な議論によって、任意のブレン・タイリングに対して対応するトーリック Fano スタック上の強巡

回例外列を与えることもできた。

②組合せ論的な側面に関しては、整合性条件と呼ばれる条件が重要であり、これまでに様々なものが提案されてきたが、それらが適当な仮定のもとで同値であることを示すことができた。

③シンプレクティック幾何的な側面については、任意のブレン・タイリングに対して完全 Lefschetz ファイブレーションが存在して、その深谷-Seidel 圏が対応するトーリック Fano スタックの接続層の導来圏と同値になることを示すことができた。

(2)西納武男氏および野原雄一氏と共同で Gelfand-Cetlin 系の Floer 理論的な研究を行った。Gelfand-Cetlin 系は旗多様体を相空間とする完全可積分系であり、表現論と密接に関連している。旗多様体はトーリック多様体への退化を持つことが知られているが、我々の研究によってこの退化が可積分系の構造と整合的であることが示され、それを用いてポテンシャル関数と呼ばれる Floer 理論的な量を計算することができた。この結果から、旗多様体はどのような Hamilton アイソトピーで移しても必ず移す前のものと交叉するような Lagrange 部分多様体を持つことが従う。

## 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

ブレン・タイリングの代数幾何学的な側面と組合せ論的な側面に関する当初の問題については、おおむね満足できる解答を与えることができた。また、Gelfand-Cetlin 系の Floer 理論的な研究についても一定の成果を

挙げることができた。ただし、ブレーン・タイリングのシンプレクティック幾何的な側面や高次元化についてはまだ不明な点が多く、さらなる研究が必要である。

#### 4. 今後の研究の推進方策

(1)ブレーン・タイリングのシンプレクティック幾何的な側面については、Laurent 多項式から定まる完全 Lefschetz ファイブレーションの深谷-Seidel 圏を具体的に記述することが中心的な課題である。これまでの研究である特別なクラスの Laurent 多項式に対しては完全な記述を得ることができたので、他の Laurent 多項式に対してはこのクラスに埋め込むことで具体的な記述を得ることを目指したい。

(2)旗多様体以外の Fano 多様体に対しても、トーリック多様体への退化を用いることによって Floer 理論的な研究を行いたい。特に、点付き Riemann 面上の放物ベクトル束のモジュライ空間は共形場理論などとも関連する重要なシンプレクティック多様体であるので、そのトーリック多様体への退化を詳しく研究したいと考えている。

#### 5. 代表的な研究成果

[雑誌論文] (計6件)

①Masahiro Futaki, Kazushi Ueda, Exact Lefschetz fibrations associated with dimer models, *Mathematical Research Letters*, Volume 17, Number 06, pages 1029-1040, 2010, 査読あり

②Takeo Nishinou, Yuichi Nohara, Kazushi Ueda, Toric degenerations of Geland-Cetlin systems and potential functions, *Advances in Mathematics*, Volume 224, Number 2, Pages 648-706, 2010, 査読あり

③ Kazushi Ueda, Masahiko Yoshinaga, Logarithmic vector fields along smooth divisors in projective spaces, *Hokkaido Mathematical Journal*, Volume 38, Number 3, Pages 409-415, 2009, 査読あり

④ Kazushi Ueda, Masahito Yamazaki, Toric Calabi-Yau four-folds dual to Chern-Simons matter theories, *Journal of High Energy Physics*, Number 12, 045, 20 pp, 2008, 査読あり

⑤ Kazushi Ueda, Masahiko Yoshinaga, Logarithmic vector fields along smooth plane cubic curves, *Kumamoto Journal of Mathematics*, Volume 21, Pages 11-20, 2008, 査読あり

[学会発表] (計19件)

① Kazushi Ueda, Homological mirror symmetry for the quintic 3-fold, *Mini Workshop on Mirror Symmetry 2011*, 2011年3月10日, 北海道大学

② Kazushi Ueda, Dimer models and triangulated categories, 第6回代数・解析・幾何学セミナー, 2011年2月16日, 鹿児島大学

③ Kazushi Ueda, On the derived category of the quintic 3-fold, *Derived Categories 2011 Tokyo*, 2011年1月27日, 東京大学

④ Kazushi Ueda, Dimer models, exceptional collections and non-commutative crepant resolutions, Test problems for the theory of finite-dimensional algebras, 2010年9月15日, Banff International Research Station, Canada

⑤ Kazushi Ueda, Homological mirror symmetry for Brieskorn-Pham singularities, 幾何学シンポジウム, 2009年8月29日, 佐賀大学

[その他]

ホームページ

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kazushi/>