

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 1 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740040

研究課題名（和文） 可解群の幾何学と部分多様体

研究課題名（英文） Geometry of solvable Lie groups and submanifold geometry

研究代表者

田丸 博士（TAMARU HIROSHI）

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：50306982

研究成果の概要（和文）：

リー群上の左不変計量を部分多様体論的に研究する枠組みを構築した。応用として、Milnor 型定理を導く一般的な手法と、三次元の場合に代数的 Ricci soliton 計量の部分多様体による特徴付けを得た。また、非コンパクト対称空間内の等質部分多様体を研究し、hyperpolar foliation の分類や cohomogeneity one 作用のラフな分類を得た。いくつかの特徴的な部分多様体の幾何的性質に関する結果も得た。

研究成果の概要（英文）：

We established a framework for studying left-invariant Riemannian metrics on Lie groups in terms of submanifold geometry. As applications, we have obtained a general procedure to get Milnor-type theorems, and a characterization of algebraic Ricci solitons in terms of submanifold geometry in three-dimensional cases. We have also studied homogeneous submanifolds in noncompact symmetric spaces, and obtained a classification of hyperpolar foliations and a rough classification of cohomogeneity one actions. Results on geometric properties of some particular submanifolds have also been obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：対称空間・超曲面・部分多様体・微分幾何・リー群・可解群・アインシュタイン多様体

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初には、可解リー群上の幾何構造および非コンパクト型対称空間内の部分多様体に関する結果がいくつか得られていた。

例えば、可解リー群上の幾何構造に関しては、放物型部分群の可解部分が左不変 Einstein 計量を持つことが分かっていた。特に、その計量は可解リー群を自然に非コンパクト型対称空間内の部分多様体とみなしたときの

誘導計量に他ならない。また、非コンパクト型対称空間内の部分多様体に関しては、等質超曲面について、焦点部分多様体を持たないという仮定の下での分類や、複素双曲空間内の場合の分類などが得られていた。これらはいずれも可解リー群の作用と深く関係する。

2. 研究の目的

上記の背景に挙げた結果は、可解リー群の幾何と非コンパクト型対称空間内の部分多様体の関係を示唆するものであった。そこで本研究は、可解リー群上の幾何構造と非コンパクト型対称空間内の部分多様体について、両者を関連付けて調べることを目的とした。

3. 研究の方法

可解リー群上の幾何構造の研究に部分多様体論を用いること、また、非コンパクト型対称空間内の部分多様体の研究に可解リー群を用いること、の二つが研究の方法である。

4. 研究成果

本研究により、次に挙げるような成果が得られた: (1) 可解リー群上の幾何構造に関する結果, (2) 非コンパクト型対称空間内の部分多様体に関する結果, (3) 関連するその他の結果. これらの結果について、以下にその概要を記す.

(1-1) リー群上の左不変計量の全体の集合は非コンパクト対称空間の構造を持ち、スカラー倍を除いて等長的という自然な同値関係が入る。児玉・高原との共同研究により、任意の計量の同値類は等質部分多様体となること、また、商集合が一次元となる任意の次元のリー群が存在すること、を示した。この結果をまとめた論文は 2011 年に出版された。

(1-2) 橋永・寺田との共同研究により、上記の商集合 (モジュライ空間) の具体的な表示から、Milnor 型定理が得られることを示した。Milnor 型定理は、左不変計量のモジュライ空間をリー代数の括弧積の変形で記述するものであり、Einstein や Ricci soliton などの特別な左不変計量の存在・非存在を判定するための有効な道具である。この結果をまとめた論文は、現在投稿中である。

(1-3) 橋永との共同研究により、三次元可解リー群に対して、左不変計量が代数的 Ricci soliton であることと対応する等質部分多様体が極小であることが同値となることを示

した。この研究は、左不変計量の幾何学的な性質を、その同値類の部分多様体的な性質で特徴付けよ、という新しい問題意識を提示するものである。この結果をまとめた論文を現在執筆中である。

(1-4) 橋永・久保と共同で、複素双曲空間内の焦点部分多様体を持たない等質超曲面のうち、Ricci soliton となるものを分類した。複素双曲空間内の超曲面は Einstein にはならないが、その一般化である Ricci soliton を許容する例が存在することが分かった。また、複素双曲空間の次元に依存して結果が変わる、という興味深い現象が起きていることも分かった。この結果をまとめた論文を現在執筆中である。

(2-1) Berndt・Diaz-Ramos と共同で、非コンパクト型対称空間上の等質な hyperpolar foliation の分類を行った。さらに、放物型部分群の可解部分の作用は、hyperpolar でない polar 作用となることを示した。ちなみにコンパクト型の場合には、階数 2 以上ならば polar 作用は全て hyperpolar となるので、この結果は、非コンパクト型特有の現象として興味深いと思われる。この結果をまとめた論文は 2010 年に出版された。

(2-2) Berndt と共同で、非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one 作用のラフな分類結果を得た。そのような作用を構成する 4 つの方法を定式化し、さらに全ての cohomogeneity one 作用は、それら 4 つの構成法のいずれかで構成されることを示した。この結果をまとめた論文は学術雑誌に掲載決定済である。

(2-3) 久保と共同で、放物型部分群の可解部分の非コンパクト型対称空間への作用に関して、全ての軌道が互いに等長的に合同となることを示した。これと以前の結果を合わせると、上記の可解部分の作用の軌道は、全て Einstein であり、さらに全て極小であることが得られる。この結果をまとめた論文は現在投稿中である。

(3-1) 藤井と共同で、群作用および運動量写像の観点から、球面内の等質超曲面に関する研究を行った。既約エルミート対称空間のイソトロピー表現の軌道となるものに関しては、超曲面の定義多項式が運動量写像のノルム二乗で表されることを示した。この結果をまとめた論文を現在執筆中である。

(3-2) 三次元 Heisenberg 群内の等質な曲面の分類を、高橋・渋谷と共同で行った。そのような曲面は、平面型と円柱面型の二種類に

限られる. この結果をまとめた論文を現在執筆中である.

(3-3) カンドル代数に対して, リーマン多様体の **two-point homogeneity** の概念の類似を定義し, そのような性質を持つカンドルのうち元の個数が素数となるものを分類した. この結果をまとめた論文は, 現在投稿中である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

1. Jurgen Berndt, Hiroshi Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, J. Reine Angew. Math., 査読有, 掲載決定済.
DOI: 10.1515/crelle-2012-0002

2. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, Math. Ann., 査読有, 351 (2011), no. 1, 51--66.
DOI: 10.1007/s00208-010-0589-0

3. Hiroshi Kodama, Atsushi Takahara, Hiroshi Tamaru, The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, Manuscripta Math., 査読有, 135 (2011), no. 1--2, 229--243.
DOI: 10.1007/s00229-010-0419-4

4. Jurgen Berndt, Jose Carlos Diaz-Ramos, Hiroshi Tamaru, Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type, J. Differential Geom., 査読有, 86 (2010), no. 2, 191--235.
<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1299766787>

5. Hiroshi Tamaru, Hisashi Yoshida, Lie groups locally isomorphic to generalized Heisenberg groups, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 9, 3247--3254.
DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09489-6

6. Hiroshi Tamaru, Noncompact homogeneous Einstein manifolds attached to graded Lie algebras, Math. Z., 査読有, 259 (2008), no. 1, 171--186.
DOI: 10.1007/s00209-007-0217-1

[学会発表] (計 20 件)

1. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and submanifold geometry, DFG-JSPS Seminar "Lie Groups: Geometry and Analysis", Paderborn (ドイツ), 2011/09/09.

2. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups and geometry of noncompact homogeneous spaces, Seminar, Tsinghua University (中国), 2011/08/18.

3. Tamaru Hiroshi, Parabolic subgroups and geometry of solvable Lie groups, 10th Panhellenic Geometry Conference, Patras (ギリシャ), 2011/05/28.

4. Tamaru Hiroshi, Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres --- Hermitian case, Mini International Workshop on Geometry of Symmetric Spaces and Related Fields, Kyungpook National University (韓国), 2011/04/15.

5. Tamaru Hiroshi, Parabolic subgroups and submanifold geometry of noncompact symmetric spaces, Mini International Workshop on Geometry of Symmetric Spaces and Related Fields, Kyungpook National University (韓国), 2011/04/14.

6. Tamaru Hiroshi, 非コンパクト対称空間への良い作用の構成法, 部分多様体幾何とリ一群作用, 東京理科大学, 2010/09/08.

7. Tamaru Hiroshi, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type (II), Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems, 東北大学, 2010/08/26.

8. Tamaru Hiroshi, Homogeneous submanifolds in noncompact symmetric spaces (全 6 回), International Mini Workshop on Integral Geometry and Symmetric Spaces, Kyungpook National University (韓国), 2010/02/22, 23, 24.

9. Tamaru Hiroshi, Canonical extensions of isometric actions on noncompact symmetric spaces, Submanifold Geometry and Lie Group Theory, 大阪市立大学, 2009/11/01.

10. Tamaru Hiroshi, The space of left

invariant metrics on a Lie group, Seminar,
King's College London (英国), 2009/09/07.

11. Tamaru Hiroshi, リー群の左不変計量の
成す空間について, 第 56 回幾何学シンポジ
ウム, 佐賀大学, 2009/08/29.

12. Tamaru Hiroshi, Parabolic subgroups,
Einstein solvmanifolds, and submanifold
geometry, II Congreso Latinoamericano de
Grupos de Lie en Geometria, Sierras de
Cordoba (アルゼンチン), 2008/08/26.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田丸 博士 (TAMARU HIROSHI)

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 50306982