

機関番号：22604

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740044

研究課題名 (和文) 弱鏡映部分多様体に関連した幾何学の研究

研究課題名 (英文) Geometry of weakly reflective submanifolds

研究代表者

酒井 高司 (SAKAI TAKASHI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：30381445

研究成果の概要 (和文)：

弱鏡映部分多様体に関連する研究を行った。球面の余接束内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成し、その特異点の様子と漸近挙動を調べた。特に、球面内のある弱鏡映部分多様体の余法束として与えられる特殊 Lagrange 部分多様体の変形が明示的に得られた。また、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の大域的タイト性と Floer ホモロジーに関する研究を行った。

研究成果の概要 (英文)：

We studied weakly reflective submanifolds. We constructed cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere and observed their singularities and asymptotic behavior. We obtained a deformation of a special Lagrangian submanifold which is given as the conormal bundle of a weakly reflective submanifold in the sphere concretely. We also studied global tightness and the Floer homology of real forms of Hermitian symmetric spaces of compact type.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：微分幾何学、極小部分多様体、等質空間、対称空間

1. 研究開始当初の背景

幾何学に現れるある種のエネルギー的最適性に関する問題は幾何学的変分問題と呼ばれ、微分幾何学において重要な研究分野となっている。特に、体積汎関数の停留点となる部分多様体は極小部分多様体と呼ばれ、幾何学的変分問題の典型として古くから研究が行われている。変分法により、極小部分多

様体は平均曲率ベクトルが恒等的に消える部分多様体として特徴付けられる。特に、キャリプレート部分多様体は体積最小となる部分多様体として重要である。例えば、Calabi-Yau 多様体内の特殊 Lagrange 部分多様体はキャリプレート部分多様体であり、現在、ミラー対称性に関連して理論物理の分野においても注目されている。

Leung は Riemann 多様体において回帰的

等変換の固定点集合として与えられる部分多様体を鏡映部分多様体と呼び、Riemann 対称空間内の鏡映部分多様体を分類した。鏡映部分多様体は定義より全測地的であり、特に極小である。一方、Harvey と Lawson は第二基本形式がある対称性をもつ極小部分多様体のクラスとして austere 部分多様体の概念を導入した。 \mathbf{R}^n 内の austere 部分多様体からは、その余法束として \mathbf{C}^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体が構成される。田崎博之（筑波大学）・井川治（福島高専）との共同研究において、法方向にある外在的な対称性を持つ部分多様体として弱鏡映部分多様体を定義し、その基本的な性質を調べた。鏡映部分多様体はこの対称性を自然にみだし、したがって弱鏡映部分多様体の概念は鏡映部分多様体の一般化であると言える。また、austere 部分多様体の定義は第二基本形式の対称性に注目しているため、部分多様体の無限小の対称性を表していると考えられるが、弱鏡映部分多様体の定義はこの対称性を大域化したものと言える。すなわち、弱鏡映部分多様体は austere 部分多様体になり、特に極小である。共同研究ではさらに対称空間の線形イソトローピー表現の軌道として得られる球面内の部分多様体の中で弱鏡映部分多様体になるものを分類した。しかし、その他の Riemann 多様体内では現在知られている例は少ない。弱鏡映部分多様体を考える利点は平均曲率を計算することなく大域的な対称性から極小性が導かれることであり、極小部分多様体を研究する上で新たな手法を与える。また、弱鏡映部分多様体は austere 部分多様体になることから、特殊 Lagrange 部分多様体など関連した幾何学の研究の発展に役立つことが期待される。

2. 研究の目的

これまでの研究により弱鏡映部分多様体の基本的な性質を調べ、球面内においてはある程度具体例を構成することができた。これにより様々な研究領域との関連に発展することが期待される。当該研究課題の目的は弱鏡映部分多様体およびそれに関連した部分多様体の幾何学的性質を明らかにすることである。具体的には次のような問題に取り組む。

- (1) 対称空間内の弱鏡映部分多様体の構成、さらに分類に向けた研究を行う。特に、対称空間内で弱鏡映になる等質超曲面の分類を行う。また、弱鏡映部分多様体の等質性について調べる。
- (2) 弱鏡映部分多様体の余法束として余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成し、その幾何学的性質を調べる。特に、球面の余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体について

詳細な研究を行う。

(3) 無限次元の場合への拡張を考える。アフィン Kac-Moody 型の無限次元対称空間の線形イソトローピー表現の軌道で弱鏡映となるものを分類する。

(4) Hermite 対称空間内の実形のタイト性と Floer ホモロジー、さらに Hamilton 体積最小性に関する研究を行う。

3. 研究の方法

(1) 弱鏡映部分多様体の分類：

これまでの研究で対称空間の線形イソトローピー表現から得られる球面内の austere 軌道と弱鏡映軌道を分類した。この研究を進展させ対称空間内の弱鏡映部分多様体の分類を進める。まず、対称空間内の等質超曲面で弱鏡映性を持つものを決定する。次に、弱鏡映部分多様体の等質性を調べる。特に球面内の等質超曲面には非等質なものがあるが、これらとの関係を研究する。

(2) 特殊 Lagrange 部分多様体の研究：

Harvey と Lawson は \mathbf{R}^n 内の austere 部分多様体の余法束は \mathbf{C}^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体になることを示した。この自然な一般化としてとして Karigiannis と Min-Oo は球面内の austere 部分多様体から球面の余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する手法を与えた。このとき球面の余接束に入っている計量は Stenzel によって導入された階数 1 のコンパクト対称空間の余接バンドルに入る Calabi-Yau 計量であり、Stenzel 計量と呼ばれる。これまでの研究により球面内、さらにコンパクト対称空間内の austere 部分多様体が具体的に得られた。Karigiannis と Min-Oo による手法を拡張し、これら階数 1 のコンパクト対称空間内の austere 部分多様体から余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する手法を与える。さらに、これらの特殊 Lagrange 部分多様体の幾何学性質を調べる。

(3) 無限次元対称空間の s 表現の軌道：

近年、無限次元対称空間の研究が注目されている。例えば、Heintze は無限次元対称空間の例としてアフィン Kac-Moody Lie 環の対合の幾何学的分類問題について研究を行っている。Tereng は無限次元対称空間の線形イソトローピー表現が Hilbert 空間への極表現になることを示した。有限次元の場合の極大トーラスの普遍被覆がこの極表現の断面になり、その基本領域が軌道空間と同一視される。この事実は我々が有限次元対称空間で行った議論の無限次元の場合への拡張を期待させる。弱鏡映性は部分多様体の大域的な対称性に注目しているため、無限次元へのアナ

ロジューを考へる際に有効であると思われる。そこで、無限次元対称空間の線形イソトローピー表現の軌道で弱鏡映性を持つものの分類を行う。

(4) 実形の幾何 :

Kähler 多様体内において反正則等長変換の固定点集合として得られる部分多様体を実形という。定義より実形は鏡映部分多様体であり、特に全測地的な Lagrange 部分多様体になる。Kähler 多様体内の Lagrange 部分多様体に対してはタイト性や Hamilton 変形の下での変分問題などが考えられる。鏡映部分多様体の対称性に着目し、実形のタイト性と Hamilton 体積最小性に関して研究を行う。

これらの課題の研究遂行のために以下の海外出張を行った。

2008 年 8 月 Augsburg 大学 (ドイツ)

2009 年 12 月 Ewha Womans University
(韓国)

2010 年 9 月 Centre de Recerca Matemàtica
(スペイン)

東京近郊のいくつかの大学と共同で「秋葉原微分幾何セミナー」を開催した。

第 1 回 Josef Dorfmeister 氏 (ミュンヘン工科大学, ドイツ) 「Introduction to the loop group method of integrable surfaces」

(2009 年 6 月 1 日)

第 2 回 Carlos Olmos 氏 (コルドバ国立大学, アルゼンチン) 「Submanifolds and Holonomy」 (2009 年 11 月 3 日)

第 3 回 橋本 義武 氏 (東京都市大学) 「共形場理論の幾何学」 (2010 年 7 月 10 日)

第 4 回 田中真紀子氏 (東京理科大学)

田崎博之氏 (筑波大学) 「コンパクト対称空間の幾何学」 (2010 年 12 月 4 日)

4. 研究成果

(1) Lagrange 部分多様体のタイト性 :

Y.-G. Oh は Hermite 対称空間内の Lagrange 部分多様体に対しタイト性の概念を導入し、複素射影空間内の大域的にタイトな Lagrange 部分多様体は全測地的に埋め込まれた実射影空間に限ることを示した。我々は $S^2 \times S^2$ 内の Lagrange 部分多様体の Killing nullity に着目し、タイトな Lagrange 部分多様体は対角に埋め込まれた Lagrange 球面と小円の積として与えられる Lagrange トーラスに限ることを示した。さらに、積分幾何と Lagrange 交叉理論を用いて複素二次超曲面内の実形の大域的タイト性について調べ、実際にそのいくつかについては大域的タイト性を持つことを示した。特に、 $S^2 \times S^2$ 内の大域的タイトな Lagrange 部分多様体は

実形に限るという結論を得た。また、タイト性の概念を等質 Kähler 多様体の Lagrange 部分多様体に対して拡張し、実際に複素旗多様体の実形のいくつかが大域的にタイトになることを示した。

(2) 余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体 :

階数 1 のコンパクト対称空間の余接束には Stenzel 計量と呼ばれる余等質性 1 の完備 Ricci 平坦計量が入る。この Stenzel 計量の対称性に着目して、運動量写像を用いた手法によって n 次元球面の余接束において $SO(p) \times SO(q)$ ($p+q=n+1$) の作用で不変な余等質性 1 の Lagrange 部分多様体を構成した。これらの Lagrange 部分多様体がさらに特殊 Lagrange 部分多様体になるための条件は常微分方程式によって記述できる。この常微分方程式の解を調べることにより、特殊 Lagrange 部分多様体の特異点の様子および無限遠での漸近挙動を調べた。これにより特異集合において複数の特殊 Lagrange 部分多様体が交わる様子が観測できた。球面の austere 部分多様体の余法束は球面の余接束内の特殊 Lagrange 部分多様体になる。 $SO(p) \times SO(q)$ の作用で不変な球面内の austere 部分多様体として Clifford 超曲面と全測地的球面があり、これらの余法束は特殊 Lagrange 部分多様体になる。我々の研究によって、これらの特殊 Lagrange 部分多様体の変形を明示的に与えることができた。

(3) 実形の交叉と Floer ホモロジー :

等質 Kähler 多様体内の Lagrange 部分多様体は正則等長変換で動かしたとき、その交点数が \mathbb{Z}_2 係数の Betti 数の和と一致するとき大域的タイトであるという。Howard は複素射影空間内の全測地的 Lagrange 部分多様体として埋め込まれた実射影空間が大域的にタイトであることを示した。この拡張として、田中-田崎はコンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉は、それぞれの対蹠集合になり、特に二つの実形が互いに合同であるとき交叉は大対蹠集合になることを示した。大対蹠集合の元の個数を 2-number といひ、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の 2-number は \mathbb{Z}_2 係数の Betti 数の和と一致することが竹内によって示されている。これにより、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は大域的にタイトであるということが結論付けられる。

閉多様体の Morse 関数の臨界点の個数が Betti 数の和以上になることは Morse の不等式としてよく知られている。この事実のシンプレクティック幾何的な一般化として、シンプレクティック多様体の実形を Hamilton 同位で変形したときの交点数は Betti 数の和で

下から評価されることが予想され、Arnold-Givental 予想と呼ばれる。Arnold-Givental 予想のためには Floer ホモロジーの計算が本質的になる。Floer ホモロジーは元々 Lagrange 部分多様体の組に対して定義される不変量である。したがって、二つの Lagrange 部分多様体に対して、それらの交叉を考えることは自然である。ところが、これに関する研究はまだ始まったばかりであり、得られている結果は数少ない。コンパクト型 Hermite 対称空間の2つの実形が横断的に交わるならば、その交叉は2つの実形の対蹠集合になる。実形は全測地的であるから点対称によって不変であり、それらの交点は不動点となる。したがって、J-holomorphic strip のモジュライ空間に自由な \mathbf{Z}_2 作用が誘導される。この事実から、単調なコンパクト型 Hermite 対称空間において、最小 Maslov 数が3以上であるような2つの実形の組に対する \mathbf{Z}_2 係数の Floer ホモロジーは2つの実形の交叉によって生成されることを示した。これにより特に、既約なコンパクト型 Hermite 対称空間の場合に Arnold-Givental 不等式の一般化が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Takashi Sakai, Introduction to integral geometry in Riemannian homogeneous spaces, Proceedings of the 14th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields Vol. 14, Kyungpook National University, Taegu, Korea, (2010), 145-162. (査読無)
- ② Hiroshi Iriyeh and Takashi Sakai, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, *Geom. Dedicata* **145**, No. 1 (2010), 1-17. (査読有)
- ③ Osamu Ikawa, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Lie-algebraic Characterization of tangentially degenerate orbits of s-representations, *Differential Geom. Appl.* **28**, No. 1 (2010), 81-101. (査読有)
- ④ Osamu Ikawa, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, *J. Math. Soc. Japan.* **61**, No. 2 (2009), 437-481. (査読有)
- ⑤ Takashi Sakai, Weakly reflective orbits and tangentially degenerate orbits of s-representations,

Proceedings of the 12th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields Vol. 12, Kyungpook National University, Taegu, Korea, (2008), 161-174. (査読無)

[学会発表] (計14件)

- ① 入江博, 酒井高司, 田崎博之, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の対の Floer ホモロジー, 日本数学会年会, 早稲田大学, 2011年3月20日
- ② 橋本要, 酒井高司, 球面の余接束内の余等質性1の特殊 Lagrange 部分多様体, 日本数学会年会, 早稲田大学, 2011年3月20日
- ③ 酒井高司, Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere, Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems, 東北大学, 2010年8月
- ④ Takashi Sakai, Tight Lagrangian submanifolds in some homogeneous Kähler manifolds, The 2nd TIMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, March 21-23, 2010.
- ⑤ Takashi Sakai, Introduction to integral geometry in Riemannian homogeneous spaces, International Mini-Workshop on Integral Geometry and Symmetric spaces, Kyungpook National University, Taegu, Korea, February 22-24, 2010.
- ⑥ Takashi Sakai, Explicit expressions of Kinematic formulae in Riemannian homogeneous spaces, 2009 Joint Meeting of the Korean Mathematical Society and the American Mathematical Society, Ewha Womans University, Seoul, Korea, December 16-20, 2009.
- ⑦ 酒井高司, Minimal surfaces with 3D-XplorMath and Maple, 計算機を用いた数学研究, 京都大学, 2009年12月
- ⑧ 酒井高司, 旗多様体の実形の大域的タイト性, 部分多様体論・湯沢 2009, 湯沢グランドホテル, 2009年11月
- ⑨ 酒井高司, Absolutely area-minimizing cones over some minimal submanifolds in the sphere, 部分多様体幾何とリー群作用, 東京理科大, 2009年9月
- ⑩ 酒井高司, Absolutely area-minimizing cones over some minimal submanifolds in S^n , 曲線と曲面の変分問題と関連する話題, 奈良女子大学, 2009年7月

- ⑪ 酒井高司, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, 可積分系と幾何学の融合, 東北大学, 2009年4月
- ⑫ 酒井高司, 弱鏡映部分多様体とその周辺の話題, 日本数学会秋季総合分科会 (幾何学分科会特別講演), 東京工業大学, 2008年9月
- ⑬ 酒井高司, 複素球面内の特殊Lagrange部分多様体の構成について, 幾何学シンポジウム, 弘前大学, 2008年8月
- ⑭ Takashi Sakai, Weakly reflective orbits and tangentially degenerate orbits of s-representations, One-Day Workshop on Differential Geometry, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, April 1, 2008.

[その他]

ホームページ

<http://www.comp.tmu.ac.jp/tsakai/>

秋葉原微分幾何セミナー

<http://tmugs.math.se.tmu.ac.jp/g-akihabara/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 高司 (SAKAI TAKASHI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 30381445

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし