

機関番号：50103

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740049

研究課題名（和文）ゲージ理論を用いた位相不変量の非可換変形

研究課題名（英文）Noncommutative deformation of topological invariants in gauge theories

研究代表者

佐古 彰史（SAKO AKIFUMI）

釧路工業高等専門学校・一般教科・准教授

研究者番号：00424200

研究成果の概要（和文）：非可換空間上のゲージ理論のソリトン解が様々な方法で作られてきたが、変形量子化の立場から可換空間上のソリトン解から構成する、あるいはその構成された解について解析されることが従来は無かった。本研究ではそれを4次元ゲージ理論のソリトン解であるインスタントン解について実行した。具体的には、可換極限が存在する  $R^4$  上で定義された  $N$  が2以上の  $U(N)$  ゲージ理論におけるインスタントンの変形量子化された解の構成方法を発見し、その解についてインスタントン数が変形されないこと、ADHM データとの1対1対応があることなどが明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Solitons in gauge theories in noncommutative spaces had been constructed by using several methods. However we did not have noncommutative soliton solutions by using deformation quantization from solitons in commutative soliton solutions, and we did not have researches for such solutions. In this study, we do them for the case of instantons that are solitons in a 4-dimensional gauge theory. Deformation quantization of instanton solutions for  $U(N)$  ( $N>1$ ) gauge theory in  $R^4$  is constructed and it is shown that their instanton numbers are preserved under the deformation quantization. We also derive the one-to-one correspondence between the instantons and ADHM data.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・微分トポロジー

キーワード：非可換幾何、ゲージ理論

## 1. 研究開始当初の背景

超弦理論の主張するところによると時空は非可換である。この発見は量子力学の発見時とは異なるレベルの非可換空間の再発見である。こうした発見を契機に非可換空間上のゲージ理論などの場の理論が研究され、そ

の結果、超対称性をもつゲージ理論の低エネルギー理論を非摂動的に完全に解いた Nekrasov-Okounkov 定理が証明されるなど、従来と異なるアプローチや応用が次々と生み出されている。

Donaldson 理論や Seiberg-Witten 理論のよ

うなものから特性類や指数定理など様々な場面で見られるように、微分位相幾何学に対してゲージ理論の果たしてきた役割は大きい。これらの経験から非可換多様体上のゲージ理論が非可換幾何学に対して大きな貢献を果たすことが期待されていた。しかしかつては注目度が低く、技術的にも未熟だったことが原因で十分な研究が行われていなかった。しかし近年は上述の通り非可換多様体上のゲージ理論が盛んに研究され、少なくとも非可換ユークリッド空間上のゲージ理論の重要なソリトン解の研究については、ある程度の道具がそろった感がある。ようやくゲージ理論を用いた非可換幾何学の時代が幕をあげようとしていた。

## 2. 研究の目的

非可換変形された多様体（非可換多様体）の微分位相幾何学的性質の解明を、その上で定義されたゲージ理論を用いて行うことが目的である。具体的には、初めにゲージ理論のソリトン解が特徴づける特性類の非可換変形を幾つかのモデルで検証し、位相不変量の非可換変形の性質を解明すること。次に、そのソリトン解のモジュライ空間の特性類である位相的場の理論についても、具体例を作成しながら一般的な位相的場の理論の非可換変形を定式化することが目的である。

## 3. 研究の方法

非可換空間上のゲージ理論を通して定義される位相不変量を解明することが目標だが、古典論のレベルでの位相不変量と量子論のレベルで定義される位相不変量の2種類がある。段階的に、まず古典論から解明する必要がある。ゲージ理論に現れるソリトン方程式としての偏微分方程式（インスタントン方程式やモノポール方程式）の厳密解やその解で与えられる特性類などの位相不変量が、どのように非可換変形されるか調査することが最初の課題である。第一段階は、慶應義塾大学前田吉昭教授との共同研究を行い、東北大学綿村哲准教授、名古屋大学浜中真志助教らの研究協力を得ることで効率化が図られた。また、フィンランド大でのA. Tureanu, M. ChaichianおよびC. Montonenらとの議論は有意義にはたらい。この成果を踏まえて第2段階である量子論レベルで定義される位相不変量の解明を目指したのであるが、それに関しては十分研究する時間がなかったのが実態である。

## 4. 研究成果

非可換空間上のゲージ理論を用いた位相不変量に注目が集まったのは非可換空間上

のソリトン解、特にインスタントン解が構成されたことがきっかけであった。非可換空間上のインスタントンの研究は、Nekrasov と Schwarz が ADHM 構成法 (Atiyah 等による ADHM データと呼ばれるある代数方程式 (ADHM 方程式) の解からインスタントンを構成する方法) を非可換  $R^4$  へ拡張することで始まった【Nekrasov-Schwarz, *Commun. Math. Phys.* 198(1998)689】。その ADHM 構成法を用いたインスタントンの厳密解 (ADHM インスタントン) がいくつか作られ【佐古彰史, 黒木伸一郎, 石川智己, *JHEP11(2001)068* 等】、それらを用いて ADHM インスタントンの定性的な解析が進んだ。例えば、局所的な曲率の積分であるインスタントン数 (Pontryagin 数) と ADHM 構成法で現れるベクトル空間の次元が一致することを示し、非可換変形を特徴付ける非可換パラメータに依存せず整数値を取ることを明らかにした【佐古彰史, *JHEP04(2003)023*, 佐古彰史, 石川智己, 黒木伸一郎, *JHEP08(2002)028*】。この対応は可換な  $R^4$  上では周知の事実である。こうした解析から ADHM インスタントンに関しては理解がすすんだ。しかし可換な場合と異なり ADHM データとインスタントンの間の 1 対 1 対応が証明されていない事、変形量子化の方法ではない構成法のため可換な空間でのインスタントンとの対応関係に不明な点がある事など、課題が残っていた。

そこで今回の研究で、我々は変形量子化の立場で、可換な空間におけるインスタントン解から滑らかに変形量子化することで非可換変形した解を構成する方法を構築し、そのインスタントン解の漸近挙動 (ゲージ場の変形部分については  $1/r^3$  のオーダーで減衰) について明らかにした。その結果として非可換  $R^4$  上で曲率の積分で定義されるインスタントン数が変形量子化のもとで変形されないことも示すことができた【前田吉昭, 佐古彰史 *J. Geom. Phys.* 58(2008) 1784】。この方法で非可換変形を受けたインスタントンを伴う Dirac 作用素に対するゼロモードも構成しその漸近挙動についても明らかにした。それらを用いてその Dirac 作用素に対する指数定理とグリーン関数も構成され、さらに  $N$  が 2 以上の  $U(N)$  ゲージ理論における変形量子化されたインスタントンから ADHM 方程式を導出することに成功した。また、ADHM データと非可換インスタントンとの 1 対 1 対応も証明することができた【前田吉昭, 佐古彰史 *レプリント arXiv: 0910.3441*】。また、 $U(1)$  のインスタントンに関しては以下の事実があきらかになった。(1). 通常の非可換変形で

は非可換インスタントンが現れない事。(2).  
しかし作用汎関数は有限に保つものの遠方での減衰が遅いゲージ場から出発すると非可換インスタントンが存在しうること。(3).  
一般に作用汎関数は非可換変形で発散を伴うが、インスタントン方程式を用いてゲージ場を変形することで、作用汎関数を有限にできる事。ただし(3)に関しては非可換パラメータの2次までの結果から得られた推論である。

以上のように、古典レベルで定義される位相不変量の非可換変形に関して  $R^4$  に関する限りは包括的な議論が行われインスタントンの変形量子化による非可換変形の様子が (U(1) インスタントンのように可換極限が存在しないものを除いては) 解明されたといってもいいだろう。特に ADHM との対応が解明されるというのは、当初の目標以上の成果と言える。その一方で量子位相不変量で定式化に関しては手つかずであったことと、その布石となるユークリッド空間以外での変形量子化によるゲージ理論の考察についても殆ど行う事が出来なかった。これらについては今後の課題としたい。

なお、今回の研究成果が以下に列挙してあるように7回もの国際会議の場で発表する機会に恵まれたのも科研費補助金に採択された結果である。もし補助金がなければ海外の研究者との議論で得られた研究成果が挙げられなかったのみならず、研究発表の場もほとんど失われたに違いないということを最後に付記しておく。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

##### ①. 佐古彰史 :

「Recent Developments in Instantons in Noncommutative  $R^4$ 」  
Advances in Mathematical Physics 査読有り  
Vol. 2010 (2010) 270694, 28 pages  
Invited article for the special issue  
“Nonlinear and Noncommutative Mathematics: New Developments and Applications in Quantum Physics”

##### ②. 佐古彰史 :

「Noncommutative Deformation of Instantons and Vortexes」  
Journal of Geometry and Symmetry in Physics 査読有り 14 (2009) p85-96

##### ③. 前田吉昭, 佐古彰史 :

「Noncommutative Deformation of

Instantons」

Journal of Geometry and Physics 査読有り  
vol. 58 (2008) p1784-1791

[学会発表] (計 10 件)

##### ①. 佐古彰史 : 国際会議招待講演

「Deformation Quantization of U(N) Gauge Theory in  $R^4$ 」 RIMS International Conference on Noncommutative Geometry and Physics (2010 年 11 月) (RIMS, Kyoto University)

##### ②. 佐古彰史 : 国際会議招待講演

「Deformation Quantization of Instantons in  $R^4$ 」 Supersymmetry in Integrable Systems - SIS' 10 (2010 年 8 月) Guest House of the Yerevan State Univ.

##### ③. 佐古彰史, 前田吉昭 : 国内会議一般講演

「ADHM 構成法の非可換変形」日本数学会 2010 年度年会 (2010 年 3 月)

##### ④. 佐古彰史 : 国際会議招待講演

「Smooth Noncommutative Deformation of Instantons and the ADHM construction」 Helsinki Univ. HIP joint colloquia seminars (2009 年 8 月) Helsinki Univ.

##### ⑤. 佐古彰史 : 国際会議ポスター発表

「Noncommutative Deformation of Instantons, Instanton Numbers and ADHM Construction」 ICMP (International Congress on Mathematical Physics) 09 (2009 年 8 月) プラハ Clarion Congress Hotel Prague

##### ⑥. 佐古彰史, 前田吉昭 : 国内会議一般講演

「ユークリッド空間上のインスタントンの非可換変形」

日本物理学会第 64 回年次大会 (2009 年 3 月)

##### ⑦. 佐古彰史, 前田吉昭 : 国内会議一般講演

「 $R^4$  上のインスタントンの非可換変形と位相不変量の保存」日本数学会 2009 年度年会 (2009 年 3 月)

##### ⑧. 佐古彰史 : 国際会議招待講演

「Are Topological Charges Preserved under Noncommutative Deformation in Gauge Theories?」 International Workshop on Noncommutative Geometry and Physics 2009 (2009 年 2 月) Keio University

##### ⑨. 佐古彰史 : 国際会議ポスター発表

「Noncommutative Deformation of Topological invariants in Gauge theories」 Sapporo Winter School 09 (2009 年 1 月) Hokkaido University

##### ⑩. 佐古彰史 : 国際会議一般講演

「Noncommutative Deformation of Vortexes and Instantons」 International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (Hotel Panorama, Varna, Bulgaria) (2008 年 6 月)

[その他]

ホームページ等

<http://www.kushiro-ct.ac.jp/ippan/staff/sako/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐古彰史 (SAKO AKIFUMI)

釧路工業高等専門学校・一般教科・准教授

研究者番号：00424200