

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 5月 30日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740060

研究課題名（和文） マルコフ過程のエクスカージョン理論の新展開

研究課題名（英文） New development of excursion theory for Markov processes

研究代表者

矢野 孝次（YANO KOUJI）

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80467646

研究成果の概要（和文）：

マルコフ過程のエクスカージョン理論に関して4つの観点から新しい展開をもたらした。
 (1) マルコフ過程に重みを掛けて正規化極限をとる問題、いわゆる処罰問題。(2) 区間上の拡散過程について境界からの跳入を持つ拡張。(3) 周遊測度および処罰問題を統一するシグマ有限測度の端点性。(4) 離散時刻ツィレルソン方程式の拡張した問題、特に、コンパクト群に値をとる場合、及び有限状態マルコフ連鎖の道路着色による時間発展。

研究成果の概要（英文）：

I have made new developments of excursion theory for Markov processes from the following four viewpoints. (1) The penalisation problems, i.e., the limit problems of Markov processes transformed by weight and normalization. (2) Extension of diffusion process on intervals which involves jumps from the boundaries. (3) Extremality of excursion measures and the sigma-finite measures unifying penalisation problems. (4) Generalized problems of discrete Tsirelson equations, in particular, those taking values in compact groups, and those of Markov chains evolving according to a road coloring.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学一般（含確率論・統計数学）

1. 研究開始当初の背景

マルコフ過程のエクスカージョン（以下、周遊）理論とは、複雑な様相を呈するマルコフ過程の標本路を、与えられた点を起終点と

する道の断片に分割し、そうして得られた周遊点過程(図1)の確率論的振る舞いを明らかにする強力な理論である。周遊理論により標本路の精緻な構造が把握できるため、応用可能な場合は明快な結果が得られる。

周遊理論は Paul Levy (1948) に端を發し伊藤清 (1972) によって完全に定式化された。周遊測度の構造について、池田信行、渡辺信三、David Williams, Jean-Michel Bismut らによりブラウン運動 (80 年代), Jim Pitman, Marc Yor らによりベッセル拡散過程 (80 年代), Patrick J. Fitzsimmons, Ronald K. Gettoor, Jean Bertoin らにより正跳レヴィ過程 (90 年代) の場合が明らかにされた。また、境界問題への応用が Zhen-Qing Chen, 福島正俊, 田中洋らによってなされた (2000 年代)。

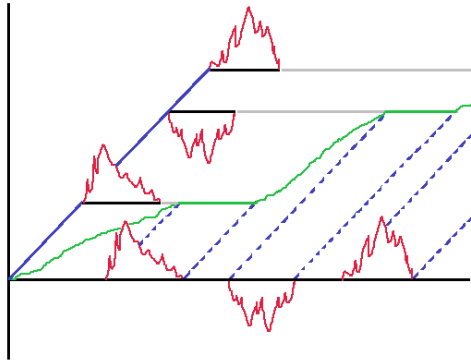


図 1. 周遊点過程のイメージ

2. 研究の目的

本研究の目的は、マルコフ過程の周遊理論を新しい視点から発展させることである。具体的には以下の問題に取り組む。

マルコフ過程 (特に、拡散過程及びレヴィ過程) の極限定理への応用、弱流出境界を持つ消滅ポテンシャルつき拡散過程の標本路の構成、周遊の成す凸集合の端点集合の決定問題。

3. 研究の方法

- (1) 約 8 年前より Bernard Roynette, Pierre Vallois, Marc Yor の三氏らによって研究されてきたブラウン運動の処罰問題と呼ばれる極限定理において、周遊理論が本質的に関わっていることを見抜いた。本研究では、周遊理論の応用として処罰問題に取り組んだ。
- (2) William Feller (50 年代) は区間上の拡散過程に対し一般境界条件を導入した。対応する確率過程の標本路の構成について、半直線上で正則境界の場合は伊藤清, Henry P. McKean (1963) が与えたが、流出境界の場合は伊藤清 (1969) が周遊理論を用いて与えた。本研究では、伊藤の方法をさらに推し進め、一般の場合を考察した。

- (3) 周遊測度は、与えられた過程に対する流入法則たちの成す凸集合において端点性を論ずることができ、それは境界拡張の既約性と関係している。本研究では、レヴィ過程の周遊測度の端点性について調べた。
- (4) 周遊測度は原点死滅過程との畳み込み方程式における非自明な解である。これと類似のものに離散時刻 Tsirelson 方程式がある。これは Boris Tsirelson による強くない解を持つ確率微分方程式の構成の際に導入されたもので、情報欠落の補完について Marc Yor によってトーラスの場合に詳しく調べられた。本研究以前に赤堀次郎・植西千尋との共同研究でコンパクト群への拡張の研究を既に始めていた。本研究では、その発展を論じた。

4. 研究成果

- (1) 周遊理論の応用として処罰問題を研究し、以下の結果を得た。

- ① 点正則対称安定過程に対し、局所時間およびカット消滅の処罰問題を示した。それらを支配するシグマ有限測度 (図 2) を、調和変換過程を用いて構成した (J. Math. Soc. Japan, 矢野裕子氏及び Marc Yor 氏との共同研究)。さらに、この結果の拡張として、スペクトル片側でない非対称狭義安定過程の場合も同様の結果をほぼ得ている。スペクトル片側の場合は、重要な問題であるが、さらに考察を要する。

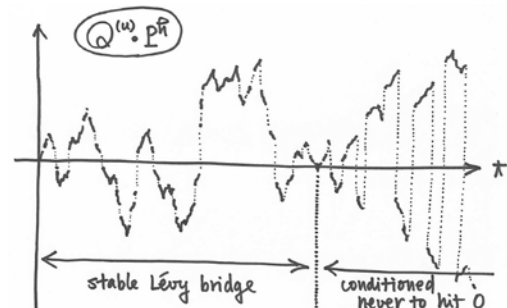


図 2. 点正則対称安定過程のカット消滅処罰問題を統一するシグマ有限測度のイメージ

- ② 従属過程を除く狭義安定過程に対し、最大値処罰問題を示した (Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 矢野裕子氏及び Marc Yor 氏との共同研究)。この結果は大変興味深いもので、それを支配するシグマ有限測度 (図 3) が矢野裕子により構成されているが、それは①のものの特異である。

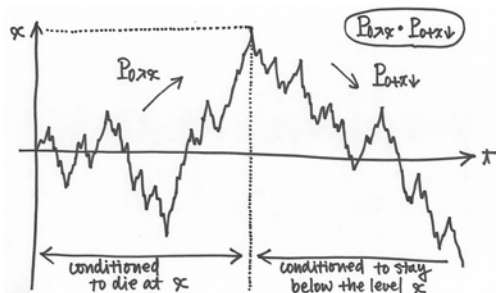


図 3. 狭義安定過程の最大値処罰問題を統一するシグマ有限測度のイメージ

- ③ ブラウン処罰問題を統一するシグマ有限測度(図 4)の平行移動に関する準不変性を調べた. その結果, カメロン・マルチンの定理と並行した結論が得られた(J. Funct. Anal.). この事実は, 三次元ベッセル過程の平行移動において準不変性が壊れ剰余項が現れるという Lorenzo Zambotti の結果と対照的で興味深い. さらなる課題としては, この結果を応用してマリアヴァン解析を展開し, 過渡的な過程に対する全時間汎関数の滑らかさを示す問題がある.

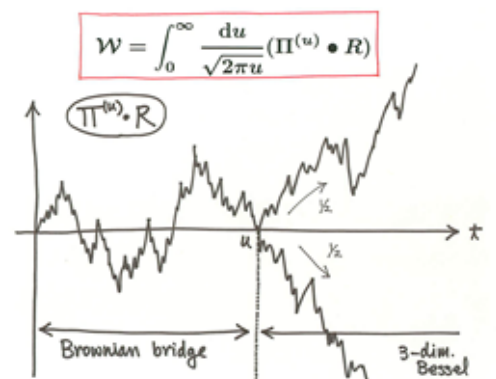


図 4. ブラウン処罰問題を統一するシグマ有限測度のイメージ

- (2) 伊藤の方法を推し進め, 区間上の拡散過程の境界問題を調べた. その結果, 境界が正則・流出・流入・自然のいずれの場合にも, 跳入を許す拡張過程を完全に決定し, その生成作用素が Feller の境界条件(とその拡張)によって記述されることを示した(論文を投稿中). 今後の展望として, 以下の問題がある. 内部からの跳入を許す拡張を論ずること, 不変原理や処罰問題などの極限定理を論ずること, 集団遺伝学への応用を論ずること.
- (3) ブラウン運動の周遊測度は端点性を持っておらず, 端点性を持つ正負の反射壁ブラウン運動の周遊測度の和で与えられる. この結果を受けて, ガウス部分を持たない点正則対称レヴィ過程の周遊測度の端

点性を調べた. その結果, 極めて一般的な仮定の下で, 端点性を持つという前述のことと対照的な結論が得られた. 端点性により, 出発点近くで無限回原点を跨いでいるという興味深い結果を得た(Potential Anal.).

- (4) 離散時刻 Tsirelson 方程式の発展的研究として, 以下の結果を得た.

- ① (一般に非可換な)コンパクト群上の離散時刻 Tsirelson 方程式について, B. M. Kloss, Albert Tortrat, Imre Csiszar による独立確率変数列の無限積の理論を用いることで, 情報欠落の補完問題をほぼ完全に解決した(Stochastic Process. Appl., 平山孝夫氏との共同研究).
- ② 任意の既約エルゴード的マルコフ連鎖が同期的な道路着色(図 5)に従う乱歩で表現できるという結果を得た, また, そのような表現の列がとれて余分な情報をいくらでも小さくできるための必要十分条件が, Murray Rosenblatt により導入された置換一様性に他ならないことを示した(J. Appl. Probab., 安富健児氏との共同研究). また, そのような表現に対するシャノンエントロピーの全体は, 区間をなしていることを示した(Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications, 安富健児氏との共同研究).

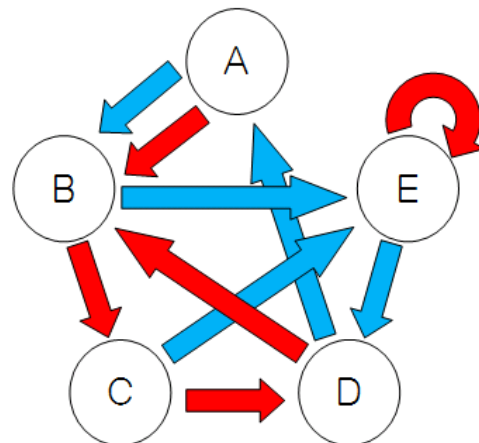


図 5. 同期的な道路着色

- ③ 有限グラフ上の道路着色乱歩は自然に拡張された意味で離散時刻 Tsirelson 方程式と見做すことができる. 既約エルゴード的乱歩において, 強い解であることと道路着色が同期的であることとの同値性を示した(J. Theoret. Probab., to appear). しかしながら, 同期的でない場合(図 6)の情報欠落がどのような量によって補完されるかは明らかになっていない. この点に

ついて、Arunava Mukherjea や Gregory Budzban により精力的になされている半群の Rees 分解を用いた解析が有効ではないかと思われる。

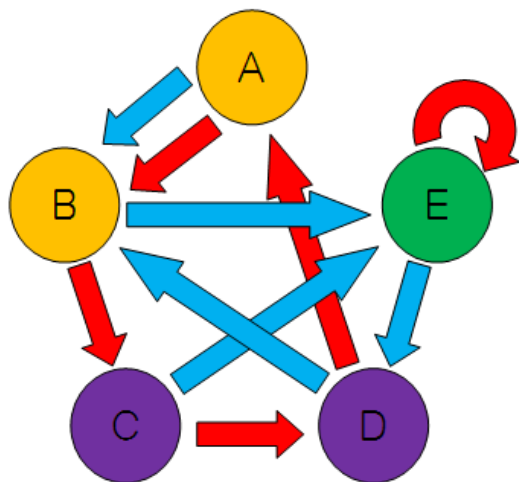


図 6. 非同期的な道路着色

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件) 全て査読有り

- ① Kouji Yano. Random walk in a finite directed graph subject to a road coloring. J. Theoret. Probab., to appear.
DOI:10.1007/s10959-011-0398-8
- ② Kouji Yano and Kenji Yasutomi. Realization of ergodic Markov chain as a random walk subject to a synchronizing road coloring. J. Appl. Probab., 48, no. 3, 766-777, 2011.
DOI: 10.1239/jap/1316796913
- ③ Kouji Yano. Wiener integral for the coordinate process under the sigma-finite measure unifying Brownian penalisations. ESAIM Probab. Stat., 15, S69-S84, 2011. Special Volume in honor of Marc Yor.
DOI:10.1051/ps/2010024
- ④ Kouji Yano, Yuko Yano and Marc Yor. Penalisation of a stable Levy process involving its one-sided supremum. Ann. Inst. Henri Poincare Probab. Stat., 46, no. 4, 1042-1054, 2010.
DOI:10.1214/09-AIHP339
- ⑤ Takao Hirayama and Kouji Yano. Extremal solutions for stochastic equations

indexed by negative integers and taking values in compact groups. Stochastic Process. Appl., 120, no. 8, 1404--1423, 2010.

DOI:10.1016/j.spa.2010.04.003

- ⑥ Kouji Yano. Cameron-Martin formula for the σ -finite measure unifying Brownian penalisations. J. Funct. Anal., 258, no. 10, 3492--3516, 2010.
DOI:10.1016/j.jfa.2009.11.021
 - ⑦ Kouji Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Levy processes without Gaussian part. Potential Anal., 32, no. 4, 305--341, 2010.
DOI:10.1016/j.jfa.2009.11.021
 - ⑧ Kouji Yano, Yuko Yano and Marc Yor. Penalising symmetric stable Levy paths. J. Math. Soc. Japan, 61, no. 3, 757--798, 2009.
doi:10.2969/jmsj/06130757
- [学会発表] (計 34 件) うち招待 16 件
- ① 矢野孝次, Excursion theoryとその応用, 確率論シンポジウム, 2011/12/19, 関西大学.
 - ② 矢野孝次, On universal sigma-finite measures for penalisations by multiplicative weights, 5th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2011/9/5, Universitat Bonn.
 - ③ 矢野孝次, Penalising stable Levy paths, 4th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2010/9/3 関西大学.
 - ④ 矢野孝次, Extremality of excursion measure and of σ -finite measure unifying penalisations, 34th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 2010/9/7, 千里ライフサイエンスセンター.
 - ⑤ 矢野孝次, Stochastic equations indexed by negative integers and taking values in compact groups, Mathematical Finance and Related Topics in Economics and Engineering, 2009/8/15, 関西セミナーハウス.

[その他]

論文リストを公開しているホームページ:
<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kyano/>

広報記事

矢野孝次, 確率的な動きの科学, 神戸大学
最前線, vol.14, 16--17, 神戸大学, 2010.
<http://www.kobe-u.ac.jp/info/public-relations/magazine/forefront/index.html>

Kouji Yano, Application of Ito's excursion
theory to limit theorems, Research Arena,
vol.2 no.1, 1--2, Kobe University, 2009.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

矢野 孝次 (YANO KOUJI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 8046764

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし