

機関番号：17102
 研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2008～2010
 課題番号：20740061
 研究課題名（和文） 確率過程に対する統計的漸近推測の理論構築とその高頻度データ解析への応用
 研究課題名（英文） Theory construction of asymptotic statistics for stochastic processes and its application to high-frequency data analysis
 研究代表者
 増田 弘毅（MASUDA HIROKI）
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授
 研究者番号：10380669

研究成果の概要（和文）：連続的に時間発展する様々な確率過程モデルの統計解析手法について、主として以下の結果を得た。(1)不均一な変動度合いを呈する場合のパラメータ推定法および近似信頼領域の構成法を定式化した。(2)モデルの長期期間での安定性のための条件を導出した。(3)ジャンプ過程の場合に、実装容易かつ高精度な平均構造推定法を与えた。(4)ノイズ過程の深刻な誤特定を回避するための処方箋を作成した。これらは全て、効率良い定量的情報搾取の道具となる。

研究成果の概要（英文）：Mainly, we have derived the following devices concerning statistical analyses for the stochastic process models: (1) how to estimate the parameters and construct their approximate confidence regions, when the model exhibits heteroskedasticity; (2) sets of sufficient conditions for the long-term stability of the models; (3) an easy-to-implement and precise method for estimating the mean structure, when the model is of pure-jump type; (4) test statistics for the noise normality, enabling us to avoid a serious model misspecification. All of these results can serve as tool for an efficient and quantitative exploitation of underlying information.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：得率過程モデルの統計解析

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：統計的漸近推測理論，確率過程論，確率解析

1. 研究開始当初の背景

ジャンプ付き確率微分方程式(SDE)およびそれから派生する確率過程による統計モデリング・統計解析は、人口統計学、生物統計、

金融工学、信号処理などの様々な応用分野において高い需要にあるにも関わらず、その理論の整備は未だ実用に十分な水準に達していない。これは、ジャンプを特徴付けるポアソ

ン配置の多様性に伴われる解析的な困難に因るものである。本研究課題の主眼は、確率微分方程式 (SDE) で記述される広い統計モデル族に対する統計的漸近推測の厳密な理論の構築とその応用である。特に、具体的なモデルから着実に理論背景 (事例) の確保を行いつつ、理論的正当性およびその実装を同時に行い、より一般のモデル設定への拡張を目指す。これに際しては、ジャンプの特性を加味した様々な極限定理の導出のみならず、当該確率過程の標本路の疑似生成など、具体的な応用の実装へ向けての数値解析的な側面の研究も不可避である。実際、SDEモデルの推定の為にしばしば本質的となる極限定理 (エルゴード定理) の正当性に関する筆者の結果が出版されたのは、本研究申請当時の頃であった。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時に明記した具体的な研究目的は、以下の四項目であった。

- (1) 長期期間版の実現多重指数変動 (Multipower variation; 以下 MPV) に基づいた SDE モデルの推測。
- (2) 常微分方程式のランダムな摂動によって定義される SDE モデルにおいて、加法的汎関数の期待値の微小摂動漸近展開の高次項を算出する為の解析表示およびアルゴリズムの開発。(吉田朋広教授 (東大) との共同研究)
- (3) 非対称安定 SDE モデルの実用的推定方式の構築、およびその漸近的現象の解明。
- (4) ミクロ構造ノイズのモデル化とその解析手法の開発。(森本孝之講師 (関西学院大) との共同研究)

3. 研究の方法

「2. 研究の目的」の項目に関連して述べる。

- (1) ジャンプがない場合の推定については良く知られている。本研究内容においては、まず第一段階としてジャンプを近似的に無視できる推定方式を構築し、次いでジャンプ部分の構造を推定することを試みる。本質的となるエルゴード性は得られているが、極限分布の導出が上手くいかない事が判明した場合、多変量モデルの連続部分の推定し、漸近分布論まで定式化を考察する。
- (2) 展開係数の一般式をそのまま計算機に乗せることはできない。まず非確率的数値積分による表現まで切り詰めた解析表示式を求め、次いでその数値計算手法を与える。解析表示の導出が困難な場合には、分散削減法を介したモンテカルロ法による計算機上の実装を試みる。
- (3) 狭義非対称安定過程のスケーリング性

を介して、歪みパラメータの単独推定を最初に行う適合的な推定方式を構築する。残るパラメータについては、歪み推定量を代入した同時推定方程式によって推定する。漸近正規性の導出を試みる。結果が出なかった場合には、経験特性関数法を考察する。

(4) 実データを通じた実証分析によって、提案手法の有用性を検証・吟味しつつ研究を進める。以下のように分業する：筆者は分析の理論背景とそれに基づいた実証分析のための処方箋作成を担当し、森本氏はデータ加工および分析の実装を担当する。

4. 研究成果

本研究期間に「2. 研究の目的」に記載した具体的な研究目的(1)~(4)を全て達成することはできなかったが、“SDEモデルの統計解析理論の整備”という課題の主眼に沿った複数の研究成果を得て出版できた。以下、まず「2. 研究の目的」の(1)~(4)をどの程度達成できたかを述べ、続いて、関連して得られた主な研究成果について述べる。必要に応じて「5. 主な発表論文等〔雑誌論文〕」の文献[1]~[12]を引用する。

2-(1)について：

MPVの長期期間版による推定に関して、レヴィ過程の拡散係数とドリフト項のモーメント型推定量の漸近分布まで特定できたが、そのために課された条件は非常に強く、汎用性に欠けるものとなった。MPVの長期期間版は国内外で先行研究は見当たらず、ドリフトまで同時に推定できるモデル設定としての有用性を期待していたが、その汎用性の低さに因り、本研究課題期間のうちには論文投稿に至らなかった。関連する研究成果として、一般的多変量SDEモデルの第二特性量行列の漸近分布論を、固定期間MPVを介して完成させた(文献[9])。具体的には、推定量のランダムな規格化と安定弱収束定理を介して漸近多変量標準正規性を導出した。これにより、全要素の同時信頼領域を直接的に構成できる。計算機上で瞬時に計算できる推定量なので、今後別の推定方式における補助(初期)推定量などとしても実用的に機能することが期待される。

2-(2)について：

微小摂動展開の各項に現れる多重レヴィ積分の条件付き期待値について、フーリエ逆変換型公式を解析的に導出できた。しかし、計算機上で自動的かつ非確率的に算出するアルゴリズムの定式化に困難があり、依然研究中である。モンテカルロ積分を回避できる段階までは到達したという進歩は大きい。摂動モデルはフィルタリング問題などに置いて

古い歴史を持つが、ジャンプ型 SDE まで扱える先行研究は国外には見当たらず、国内においては、他に石川-林の結果がある。後者は理論面に重点を置いており、数値計算的側面には踏み込んでいないという点に置いて我々とはスタンスが異なる。

2-(3)について：

まず、本研究課題申請時に投稿中であった対称非正規安定型モデルに関する推定手法の構築に関する結果は文献[8]として出版された。その後、非対称安定レヴィ過程で駆動される一種の SDE モデルにおいて、増分分布の対称化を介した推定という当初の研究計画を成就でき、文献[5]として出版できた。実際、当初のモデル設定を拡張し、より表現力の高いスケール変動安定型 SDE モデルにおいて、時間積分スケール・安定指数・歪み係数の二段階推定量を構成できた。その漸近分布は一般には正規分散混合となる。当該 SDE モデルの枠組みで、全パラメータ推定を分布論まで展開したのは本結果が初めてである。提案手法は極めて実装容易なため、安定型モデルが有用である応用分野における高い汎用性が期待される。

2-(4)について：

二次変動理論の観点から、ジャンプの存在はマイクロ構造ノイズ現象の直接解明に関与するとは言えなく、当初の研究計画を修正して以下の二つの結果を得た。共に国内市場データを主とした実証分析を幅広く行っている。

- ① MPV を利用して、特に日本市場の高頻度経済データ系列におけるジャンプ検出の実証分析を行った。MPV の次数の選択基準として、有限標本においては理論的に許容される最小整数が最も良い推定精度を示すことを数値実験で示し、実証分析で用いた次数の根拠とした。文献[11]として出版された。特に、日次データのような形式上非高頻度観測でも、数十年単位の長期期間を対象にすれば、実用上十分な精度でジャンプ検出を行えることを実証した。取引がない時間帯（日本市場で言う昼休みと夜間）を考慮した修正型実現ボラティリティの最適ウェイトを定式化し、実証分析を行った。本論文は現在、雑誌 The Japanese Economic Review へ改訂版を再投稿中である。以下の URL からプレプリントをダウンロード可能：
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1086883

次に、上記(2-(1)~2-(4))以外に関連して得られた研究成果について述べる。以下の研究成果は全て、当初の研究目的である「SDE モデルの推定に際しての、厳密な理論的背景

を有する実装容易な手法とそのためのツールの開発」という本研究の主旨に沿ったものである。

- (1) 局所的に有限回なジャンプを持つ SDE モデルのエルゴード性および積率の(時間に関する)有界性のための十分条件を導出した。条件は確率的な記述を一切含まず、初等的な演算のみで検証できる。これは当該モデルに関する統計解析のみならず、純粋確率論の分野でも様々な応用を持つと思われる。文献[12]として出版された。
- (2) ノイズが加法的に加わる場合の一次元 SDE を高頻度に観測する枠組みで、駆動レヴィ過程の Jarque-Bera 型正規性検定統計量の漸近帰無分布(自由度2のカイ二乗分布、すなわち分布無依存)、および任意の対立仮説(任意のジャンプ部分が存在)に対する一致性を導出した。提案検定手法は、応用において正規・非正規ノイズいずれが妥当であるかの指標としても使えるため、SDE モデルの誤特定による深刻な解析結果の誤認を回避するための有用かつ実用的なツールとして機能する。世界的視野において、SDE 推定のモデル評価における新たな知見が得られた。本内容は Sangyeol Lee 教授(ソウル国立大)との共同内容であり、文献[7]として出版された。現在、筆者は一次元の枠組みで加法的ノイズという設定の緩和に成功している：下記からプレプリント[4]をダウンロード可能。
<http://gcoe-mi.jp/temp/publish/bdfa1e74d21a7ee1a912e6b8877a576b.pdf>
- (3) 不連続オルンシュタイン-ウーレンベック(OU)過程の最少絶対偏差型推定を定式化し、ドリフト推定の収束率について正規型の場合よりも速く収束する正則な推定量を構成可能である。更に、絶対最少偏差型確率場の強固収束(コンパクト集合上の弱収束および多項式型大偏差不等式)を導出し、当該推定量の漸近正規性とその特殊なステューデント化を提案し、近似信頼区間の実用的な構成方法を示した。本結果の推定法は駆動レヴィ測度の完全な情報を要さないため、モデリングエラーに対する頑健性を有する。文献[6]として出版した。
- (4) 一般の tempered stable OU 過程の遷移確率の正確な構造を導出し、結果として、ノイズが有界変動か非有界変動かで本質的に異なる乱数生成法が必要である

ことを解明した。これらは
<http://gcoe-mi.jp/temp/publish/dd38e40df57f6aac5b6fabcee5bef87b.pdf>
および
<http://gcoe-mi.jp/temp/publish/b82c5baf0f404a52f6dc686490dfe28e.pdf>

にプレプリントとしてアップしてある
：現在投稿中。これらの論文では、上記
の各場合における乱数生成の処方箋も
併せて導出しており、推測方法の数値的
検証において重要な道具となる。

- (5) 上記のTempered stable乱数について、
特に非有界変動の場合には正確かつ実
用的な生成法の導出は困難である（有界
変動の場合の棄却法が適用できない）。
そこで、特に計算量という従来にはない
要素を取り込んだ上で、様々な手法を比
較・解析した。従来のTS乱数生成理論で
は級数表現を介した生成法が推されて
いたが、計算負荷（乱数生成スピード）
と分布精度の観点から、Baeumer and
Meerschaert (2009)の近似棄却法が実
用上最も好ましいことを示した。その一連
の解析結果および数値実験結果は、文献
[3]として出版された。
- (6) Meixnerおよびnormal inverse Gaussian
レヴィ過程から高頻度観測を得る設定
で、尤度比確率場の漸近挙動を明確化し
、それぞれ文献[2]、[1]としてまとめた
。これらの結果から、各パラメータ毎の
収束率の差異や漸近直交性および退化
性など、推定における基本的な性質が明
らかになった。結果、当該モデルにお
ける最尤法の実用上の利点・欠点が浮き
彫りになった：特定のパラメータの最尤
推定量は他のそれより速く収束するため
、適合的な推定方式の定式化の可能性が
期待される；漸近フィッシャー情報量行
列が常に退化する。こうして、当該モ
デルにおける低頻度観測と場合との本質
的な違いが明確化された。高頻度観測さ
れる非正規型レヴィ過程の尤度の漸近
構造に関する結果は、基本的であるにも
関わらず、一般的な結果の導出が困難で
あるという理由から、世界的視野で見
ても先行研究はごく僅かである。本研
究成果は、今後高頻度データの非正規
モデリングにおいて重要な事例を与え
るため、今後に十分なインパクトを持
つと予想される。
- (7) 高頻度観測される拡散過程に対し、
ドリフト係数のノンパラメトリックな
適合度検定統計量を提案し、その漸近
挙動を

導出した：帰無下で漸近的に分布無依
存（標準ブラウン運動の汎関数）、かつ
対立下で一致性を持つ。本結果は、洋
雑誌 Journal of Nonparametric Statistics
からの出版が確定している。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線）

〔雑誌論文〕（計 13 件）

- ① Kawai, R. and Masuda, H., Local asymptotic normality for normal inverse Gaussian Lévy processes with high-frequency sampling. ESAIM. Probability and Statistics に掲載決定。査読あり。
[<https://qir.kyushu-u.ac.jp/dspace/handle/2324/17018>]
- ② Kawai, R. and Masuda, H. (2011), On the local asymptotic behavior of the likelihood function for Meixner Lévy processes under high-frequency sampling. Statistics and Probability Letters 81, 460-469. 査読あり。
- ③ Kawai, R. and Masuda, H. (2011), On simulation of tempered stable random variates. Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 2873-2887. 査読あり。
- ④ Masuda, H. (2010), Approximate quadratic estimating function for discretely observed Lévy driven SDEs with application to a noise normality test. MI Preprint Series, Kyushu University, 2010-21. 査読なし。
[<https://qir.kyushu-u.ac.jp/dspace/handle/2324/17028>]
- ⑤ Masuda, H. (2010), On statistical aspects in calibrating a geometric skewed stable asset price model. In “Recent Advances in Financial Engineering 2009: Proceedings of the KIER-TMU International Workshop on Financial Engineering 2009”, World Scientific Pub Co Inc. (pp.181-202.) 査読あり。
- ⑥ Masuda, H. (2010), Approximate self-weighted LAD estimation of discretely observed ergodic Ornstein-Uhlenbeck processes. Electronic Journal of Statistics 4, 525-565. 査読あり。
- ⑦ Lee, S. and Masuda, H. (2010), Jarque-Bera normality test for the driving Lévy process of a discretely observed univariate SDE. Statistical Inference for Stochastic Processes 13, 147-161.

査読あり.

- ⑧ Masuda, H. (2009), Joint estimation of discretely observed stable Lévy processes with symmetric Lévy density. *Journal of the Japan Statistical Society* 39, 49-75. 査読あり.
- ⑨ Masuda, H. (2009), Estimation of second-characteristic matrix based on realized multipower variations. (in Japanese) *Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics* 57, 17-38. 査読あり.
- ⑩ Masuda, H. (2009), Notes on estimating inverse-Gaussian and gamma subordinators under high-frequency sampling. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 61, 181-195. 査読あり.
- ⑪ Masuda, H. and Morimoto, T. (2009), Empirical analysis on jump detection in high-frequency data. (in Japanese) *Journal of the Japan Statistical Society (Japanese Issue)* 39, 33-63. 査読あり.
- ⑫ Masuda, H. (2008), On stability of diffusions with compound-Poisson jumps. *Bulletin of Informatics and Cybernetics* 40, 61-74. 査読あり.

[学会発表] (計 29 件)

(以下, 日本語講演(英語講演)の場合には講演者名を漢字(英字)で表記)

- ① Masuda, H. "Cauchy quasi-likelihood in SDE estimation", (March 21, 2011; *Asymptotical Statistics of Stochastic Processes VIII*, University of Maine, Le Mans, France)
- ② Masuda, H. "LAD type estimation of OU processes with activity index less than 2", (March 17-18, 2011; workshop "Statistical inference and numerical analysis for stochastic processes and financial econometrics", Florence, Italy)
- ③ Masuda, H. "LAD estimation of Lévy-OU processes with possibly small activity index", (February 22, 2011; workshop "Statistics for Stochastic Processes: Inference, Asymptotic Methods, Finance and Data Analysis", Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo)
- ④ Masuda, H. "Non-Gaussian quasi-likelihood estimation of jump processes", (December 15, 2010; CREST and Sakigake International Symposium *Asymptotic Statistics, Risk and Computation in Finance and Insurance*

2010, Tokyo Institute of Technology University)

- ⑤ 増田 弘毅 "Mighty convergence in Gaussian quasi-likelihood estimation of discretely observed SDE with jumps", (December 4, 2010; workshop "金融工学・数理・計量ファイナンスの諸問題 2010", 大阪市中央公会堂)
- ⑥ Masuda, H. "On estimating SDE with jumps" (September 7, 2010; SPA OSAKA 2010, Senri Life Science Center Building)
- ⑦ Masuda, H. "Approximate LAD type estimation of discretely observed processes", (August 22, 2010; EMS2010: 28th European Meeting of Statisticians, University of Piraeus, Greece)
- ⑧ Masuda, H. "On parametric estimation of discretely observed SDE", (June 17, 2010; Dynstoch meeting 2010, Université d'Angers, France)
- ⑨ 増田 弘毅 "On likelihood function for discretely observed tempered stable OU processes", (March 26, 2010; 日本数学会, 慶應大学)
- ⑩ Masuda, H. "On estimation of discretely observed Lévy-driven SDEs", (February 22, 2010; workshop "Stochastic Analysis and Statistical Inference V", University of Tokyo)
- ⑪ 増田 弘毅 "On calibrating a skewed-stable model with finite mean", (December 5, 2009; workshop "金融工学・数理・計量ファイナンスの諸問題 2009", 大阪大学中之島センター)
- ⑫ Masuda, H. "Self-weighted LAD estimation of Lévy-driven OU processes", (October 10, 2009; Dynstoch meeting 2009, Humboldt University of Berlin, Germany)
- ⑬ Masuda, H. "Explicit estimators of a skewed stable model based on high-frequency data", (August 4, 2009; KIER-TMU International Workshop on Financial Engineering 2009, Otemachi SANKEI Plaza)
- ⑭ Masuda, H. "On explicit estimation of Lévy-driven SDEs", (July 3, 2009; Seminars in Statistics and Mathematics, University of Milan, Italy)
- ⑮ 増田 弘毅 "On simulating increments of Lévy processes", (March 27, 2009; 日本数学会, 東京大学)
- ⑯ Masuda, H. "Quasi-likelihood estimation of a Lévy-driven SDE and its application", (March 16, 2009; *Asymptotical Statistics of Stochastic Processes VII*, University of Maine, Le

Mans, France)

- ⑰ 増田 弘毅 "On estimation of the second characteristic", (January 22, 2009; workshop "数理ファイナンスとその周辺", 九州大学西新プラザ)
- ⑱ 増田 弘毅 "Simple test for the variation of a discretely observed process: long-term asymptotics", (December 7, 2008; workshop "金融工学・数理・計量ファイナンスの諸問題 2008", 大阪大学中之島センター)
- ⑲ Masuda, H. "A normality test for the driving noise of a SDE", (November 27, 2008; workshop "Stochastic Analysis and Statistical Inference III", University of Tokyo)
- ⑳ Masuda, H. "On estimation of the second characteristic", (June 26, 2008; DYNSTOCH meeting 2008, University of Padova, Italy)

[その他]

ホームページ等

(1) 個人ホームページ

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hiroki/>

(雑誌論文13件・学会発表29件を含む全業績の情報記載)

(2) 九州大学学術情報リポジトリ

http://leda.lib.kyushu-u.ac.jp/profile/au_name:Masuda,+Hiroki

(プレプリントの一部へのリンクあり)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

増田 弘毅 (MASUDA HIROKI)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：10380669