様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　３月３１日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008～2009
課題番号：20740062
研究課題名（和文）　爆発レートの数値的比較手法の開発

研究課題名（英文）　A study on a numerical method of comparison of blow-up rates

研究代表者
廣田　千明（CHIAKI HIROTA）
秋田県立大学システム科学技術学部・准教授
研究者番号：00336447

研究成果の概要（和文）：微分方程式の解が有限の時刻で発散してしまうことがある．このような解は爆発解と呼ばれる.爆発解に対して,爆発時刻や爆発レートが研究されている．本研究では，２つの爆発解に対してその爆発レートを比較する数値的方法を考案した．また，この方法の有用性を示すいくつかの数値例を示した．

研究成果の概要（英文）：It is often the case in practice that the solution of differential equation diverges at a finite time. Such a solution is said to be "blow-up" solution. For blow-up solutions, blow-up time and rate have been studied. In this study we propose a numerical method of comparison of blow-up rates. Some numerical experiments show the validity of our method.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,000,000	300,000	1,300,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：応用数学

１．研究開始当初の背景

有限の時刻で発散するような微分方程式の解を爆発解という．爆発解は曲率流方程式やKeller-Segel系など様々な方程式に現れることが知られており，その解析は応用上重要である．爆発解をもつ最も有名な偏微分方程式は藤田型と呼ばれる方程式である．この方程式は $p>0$ として

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \qquad (1)$$

と表わされる．この方程式に対して，拡散のない方程式

$$\frac{dU}{dt} = U^p \qquad (2)$$

を考えると，この常微分方程式は解くことができ

$$U(t) \sim \frac{1}{(T-t)^{1/(p-1)}} \qquad (t \to T) \quad (3)$$

となることがわかる(ここで$T>0$は定数で爆発時刻を表す)．爆発解の発散の速度は爆発レートと呼ばれ，特に(3)で表わされる爆発レートをＩ型と呼ぶ．偏微分方程式(1)の爆発解は微分方程式(2)に拡散の効果が加わったものなので，爆発レートは(3)で表わされる爆発レートより遅くなることが予測されるが，

$n \geq 11,\ p > (n-2\sqrt{n-1})/(n-4-2\sqrt{n-1})$

のとき，偏微分方程式(1)の解として，(3)で表わされる爆発レートより速い発散速度を持つ解が知られている．このように(3)で表わされる発散速度より速い爆発レートをⅡ型と呼ぶ．偏微分方程式(1)に対しては

$$n \geq 3,\ p = (n+2)/(n-2)$$

のときも同様にⅡ型の爆発が発生することが知られている．これらの事実は拡散が爆発の速度を速める効果をもつことを示し，興味深い現象として解析されている．特に現在はⅡ型の爆発の発生条件やメカニズムが様々な方程式に対して理論的に解析されている．

一方，爆発解の数値計算は非常に難しいことが知られている．微分方程式の数値解法は解のテイラー展開を有限項で打ち切ることで公式を導出しているが，爆発解の問題では解の高次の導関数も発散するので，打ち切り誤差が発散してしまう．したがって爆発解の数値計算を行うには，爆発解向きの数値解法の開発が必要となっている．研究代表者らは変数変換により方程式を解曲線の長さを独立変数とする方程式に変換し，その方程式を解くことにより爆発時刻に一次収束する数列を作り，その数列をAitkenΔ^2法で加速することで爆発時刻を推定する方法を考案している．この方法を簡単に説明すると，時刻Tで解が爆発する常微分方程式系

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(0) = y^0 \qquad (4)$$

を考える．ただし，$y=(y_1,\ldots,y_n)^T$，$f(t,y)=(f_1(t,y),\ldots,f_n(t,y))^T$，$y^0=(y_1^0,\ldots,y_n^0)^T$である．ここで(4)を解曲線の長さを$s$として

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$t(0)=0, \quad y(0)=y^0$$

に変換する．爆発レートが

$$y(t) \sim \frac{1}{(T-t)^p} \qquad (t \to T) \qquad (6)$$

で表わされる場合，数列$\{S_l\}$を

$S_l = S_0 \cdot \gamma^l$， $S_0>0,\quad \gamma>1,\quad l=0,1,2,\ldots$

で定義し，数値解$t_l \approx t(S_l)$を求めると，この数列$\{t_l\}$は爆発時刻に一次収束することが示せる．一次収束列はAitkenΔ^2法により効率的に収束先を推定することができるので，爆発時刻を効率的に推定できる．また，推定した爆発時刻を$\tilde{T}$で表わしたとき

$$p_l = 1/\log_\gamma \left| \frac{t_l - \tilde{T}}{t_{l-1} - \tilde{T}} \right|$$

を計算することにより，(6)式のpを推定することに成功している．この方法は従来までの解を精度よく求めるという発想でなく，有限確定値である爆発時刻と(6)式のpを効率よく求めるという方法で，独創的手法である．この手法は大変な成功を収めたが，偏微分方程式の爆発解がＩ型であるかⅡ型であるかの議論には直接的に利用することができず，新たな手法の開発が必要であった．

２．研究の目的

Ⅱ型の爆発の定義はＩ型の爆発レートより速いということであるので，ある基準となる爆発レートより研究対象となっている爆発解の爆発レートが速いのか遅いのかを比較する方法があれば，その爆発がＩ型で

あるかⅡ型であるかを判定することができる．これを数値計算において実現することが目的である．

３．研究の方法

２つのスカラの爆発問題

$$\frac{dy_1}{dt} = f(t, y_1), \quad y_1(0) = y_1^0, \qquad \frac{dy_2}{dt} = f(t, y_2), \quad y_2(0) = y_2^0 \tag{7}$$

を考える．この２つの爆発解の爆発レートを比較するには，時刻tを爆発時刻に近づけたときに解の比$y_1(t)/y_2(t)$が発散するか収束するかを調べればよいが，爆発時刻が異なればこの比には意味がない．一般にy_1とy_2の爆発時刻は異なり，しかも通常は未知なので，このような比較は行えない．研究代表者は以前の研究で，微分方程式をそのまま解くのではなく，変数変換により(5)に変換して解く方法を用いていた．ここでもその方法を利用し，２つの問題でyを共通としてそれぞれの時刻tがそれぞれの爆発時刻に収束する速さを比較することを考える．

微分方程式(7)に対して$y = y_1 = y_2$，$y^0 = y_1^0 = y_2^0$として次の微分方程式

$$\frac{dy}{dt_1} = f(t_1, y), \quad y(0) = y^0, \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt_2} = g(t_2, y), \quad y(0) = y^0 \tag{9}$$

を考える．ただし，(9)式は比較の基準となる問題であり，自由に問題を設定できるので$y^0 = y_1^0 = y_2^0$としても差し支えない．ここで微分方程式(8)に(5)の変換を施すと

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t_1 \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+f(t_1,y)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ f(t_1,y) \end{pmatrix} \tag{10}$$

となる．他方，(9)にも同じ変換を行うと$dy/dt_2 = (dy/ds)/(dt_2/ds)$より

$$\frac{dt_2}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+f(t_1,y)^2}}\frac{f(t_1,y)}{g(t_2,y)} \tag{11}$$

となる．微分方程式(10)と(11)を連立させて解くことにより，t_1, t_2, yを求めることができ，このようにして求めたt_1, t_2はyを共通としてそれぞれ爆発時刻へ収束する．t_1とt_2の収束速度を比較することで

$$\lim_{s\to\infty}\frac{T_1 - t_1(s)}{T_2 - t_2(s)} = \begin{cases} \infty \ (y_1\text{の方が発散が速い}) \\ \text{Const.} \ (\text{発散の速さは同じ}) \\ 0 \ (y_2\text{の方が発散が速い}) \end{cases}$$

というように発散速度を比較できる．ただし，T_1, T_2はそれぞれ(8),(9)の爆発時刻を表し，T_2は既知である．実際に計算を行う場合はT_1の替わりに，十分大きなs_0に対して$t_1(s_0)$をT_1の近似値として利用する必要がある．

また多次元問題に対しては

$$Y(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

を考え，(8)の替わりにYが満たす微分方程式を考えれば比較が可能となる．

４．研究成果

①研究の方法で説明した通り，爆発レートを比較する方法を考案することができた．この方法を用いることで，爆発解がⅠ型であるかⅡ型であるかを判定することができる．

②いくつかの数値例により，提案した爆発レートの比較方法の有効性を示した．そのうちの一つを示すと，$T = 1/2$として，微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{T-t} + \frac{1}{(T-t)^2}, y(0) = 2\log 2 \tag{12}$$

を考える．この方程式の解は

$$y(t) = \frac{1}{T-t}\log\frac{1}{T-t} \tag{13}$$

となる．解はわかっていないとして

$$y(t) \sim \frac{1}{\tilde{T} - t} \quad (t \to \infty) \tag{14}$$

と爆発レートを比較してみる．この問題では爆発レートは(14)より(13)の方が速い．(12)と(14)がみたす微分方程式を連立させるので

$$\frac{dy}{dt_1}=\frac{y}{T-t_1}+\frac{1}{(T-t)^2},$$

$$\frac{dy}{dt_2}=y^2,$$

$$y(0)=2\log 2$$

を考えることになる．最終的に提案する手法では，(12)の解曲線に沿って解くので

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{A}\begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{y}{T-t_1}+\frac{1}{(T-t_1)^2}\right)\frac{1}{y^2} \\ \frac{y}{T-t_1}+\frac{1}{(T-t_1)^2} \end{pmatrix},$$

$$A=\sqrt{1+\left(\frac{y}{T-t_1}+\frac{1}{(T-t_1)^2}\right)^2}$$

を解くことになる．$S_l=1000l$ として数値実験を行った結果を表 1 に与える．ただし，

$$\frac{T-t_1(S_{l-1})}{\tilde{T}-t_2(S_{l-1})}\approx\frac{t_1(S_l)-t_1(S_{l-1})}{t_2(S_l)-t_2(S_{l-1})}$$

と近似している．表より $t_1(S_l)-t_1(S_{l-1})/t_2(S_l)-t_2(S_{l-1})$ が増大していることがわかるので，(13)の方が発散速度が速いことがわかる．

表 1.(12)と(14)の爆発レートの比較

l	S_l	$\frac{t_1(S_l)-t_1(S_{l-1})}{t_2(S_l)-t_2(S_{l-1})}$
0	0.000e+00	
1	1.000e+03	6.869e-01
2	2.000e+03	4.672e+00
3	3.000e+03	5.148e+00
4	4.000e+03	5.447e+00

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計２件）

① 廣田 千明，小澤 一文，爆発レートの比較手法，日本応用数理学会 2009 年度年会，2009 年 9 月 30 日，大阪大学豊中キャンパス．

② 根本 衛，廣田 千明，小澤 一文，方程式 $u_t=u^{\delta}(\Delta u+\mu u)$ の爆発速度に関する数値的考察，平成 21 年度第 1 回情報処理学会東北支部研究会，2009 年 12 月 7 日，秋田大学．

６．研究組織

(1)研究代表者

廣田　千明（CHIAKI HIROTA）

秋田県立大学システム科学技術学部

研究者番号：00336447

(2)研究協力者

根本　衛（MAMORU NEMOTO）

秋田県立大学大学院システム科学技術研究科電子情報システム学専攻