

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2009

課題番号：20740065

研究課題名 (和文) 円周上に値をとる時系列データのための統計モデル

研究課題名 (英文) Statistical Models for Time Series of Circular Data

研究代表者

加藤 昇吾 (KATO SHOGO)

統計数理研究所・数理・推論研究系・助教

研究者番号：60468535

研究成果の概要 (和文)：

ある地点における1時間毎の風向を記録したデータや、渡り鳥の移動方向を一定時間おきに記録したデータは、個々の観測が円周上の点として表されることから、円周上に値をとる時系列データとみなすことができる。本研究では、円周上に値をとる時系列データのための確率モデルの提案を行い、その統計的性質の考察とデータへの応用を行った。この研究により、実際に観測されたいくつかの時系列データに対し、既存のモデルよりもより良い当てはめを与える新たなモデルを提案することに成功した。

研究成果の概要 (英文)：

Data which can be expressed as sets of observations on the circle arise in a number of areas of applications such as meteorology and biology. On occasions, circular observations appear in a time series context. For instance, a series of wind directions measured hourly at a weather station can be considered an example of time series of circular data. Another example is a time series of directions of movements of migratory birds observed in biology. For the modeling of such data, we have proposed some statistical models and investigated their properties. Applications of the models have been given. It has been shown that the presented models provide better fits to some data than the well-known existing processes.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：統計数学

## 1. 研究開始当初の背景

様々な科学分野において、観測データが円周上の点として表されるデータがある。例えば、気象学における風向データはその一例である。風向は、東を0度とし、反時計回りを正の向きとすれば、北を90度、西を180度、南を270度のように角度 $\theta$ で表すことができる。つまり、任意の風向は0度から360度までの角度、もしくは円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ として表現できる。他には、生物学における渡り鳥の移動方向のデータも同様に円周上のデータと解釈することができる。その他、医学や遺伝子工学等の分野においても、円周上の点からなる集合として表されるデータが存在し、その具体的なデータは例えばMardia and Jupp (2000) などに見ることができる。

また、円周上に値をとる時系列データも様々な分野において観測される。例えば、ある地点における1時間毎の風向を記録したデータや、渡り鳥の移動方向を一定時間おきに記録したデータは、個々の観測が円周上の点として表されることから、円周上に値をとる時系列データとみなすことができる。このような時系列データを解析するために有用な時系列モデルはどのように定義できるか、また、そのモデルの性質、統計的推測がどの程度議論できるか、という問題が円周上の時系列データの解析における1つの問題である。

過去には、Breckling (1989)、Fisher and Lee (1994)、Holzmann *et al.* (2006)らによって、円周上に値をとる時系列モデルが提案された。Breckling (1989) は、2つの確率過程、つまり von Mises 過程と wrapped 自己回帰過程、を提案し、Fremantle の港における風向の時系列データへと応用した。また、Fisher and Lee (1994) は、自身の提案したモデルをオーストラリア首都特別地域の Black Mountain における風向の時系列データへと応用した。また、Holzmann *et al.* (2006) は円周上の時系列データのための隠れマルコフモデルを提案した。

## 2. 研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」で紹介した既

存のモデルはデータによっては有用ではあるが、これらのモデルで記述できる現象は限られており、より多様な円周上の時系列データを解析するためには、既存のモデルとは異なる新たな時系列モデルを考案する必要がある。このような背景の下で、私は、方向データのための時系列モデルに関する研究を行った。

## 3. 研究の方法

研究方法の流れとして、(a) 円周上に値をとるマルコフ過程の提案と、(b) マルコフ過程の拡張、と2つのステップに分けて研究を行った。以下、それぞれについて具体的に述べる。

(a) Kato *et al.* (2008)は、説明変数、被説明変数が共に円周上に値をとる回帰モデル(circular-circular 回帰モデル)を提案した。本研究では、彼らのモデルを応用することにより、円周上の時系列データのためのマルコフ過程を得た。そのモデルについて、性質、パラメータ推定や検定問題について考察を行った。

(b) 次に、(a)で提案したマルコフ過程の拡張を議論した。具体的には、誤差分布として Kato and Jones (2010)による非対称分布を採用したマルコフ過程に関する考察、および、マルコフ過程を拡張した自己回帰過程について研究した。

## 4. 研究成果

(2008年度)

1年目にあたる2008年度は、円周上に値をとる自己回帰過程の提案とその性質に関する研究を行った。特に、自己回帰過程の特別な場合であるマルコフ過程に着目し、主にこのモデルの性質について調べた。提案したマルコフモデルは、Kato *et al.* (2008)で提案した回帰モデルを応用することにより導出した。この回帰モデルは、説明変数・被説明変数が共に円周上に値をとるモデルである。そのモデルにおいて、説明変数を時間 $n$ における状態 $X_n$ 、被説明変数を時間 $n+1$ における状態 $X_{n+1}$ と置き換えることによりマルコフ過程を得た。また、この確率過程の誤差項としては、上記論文の回帰モデルの誤差分布と同様に、wrapped Cauchy 分布 (以下、WC

分布)を仮定した。私は、提案したマルコフ過程に幾つかの望ましい性質が成り立つことを示した。例えば、提案したモデルにおいて、時間  $t$  における状態  $W_t=w_t$  を所与としたときの、時間  $t+h$  の状態  $W_{t+h}$  の条件付き分布は WC 分布に従う。また、この確率過程の定常分布が WC 分布となることも証明した。モデルの応用例として、米国、テキサス州にある気象観測所で記録された風向の時系列データへの当てはめを行った。幾つかの情報量規準の比較において、私が提案したモデルの方が、Fisher and Lee (1994)によるモデルよりも、よい当てはめを与えることがわかった。

(2009 年度)

2 年目にあたる2009年度では、2008年度に引き続き、円周上に値をとる時系列データのための確率モデルに関する研究を行った。具体的には、(i)2008年度に提案したマルコフ過程の性質に関する更なる考察、そして、(ii)マルコフ過程を拡張したモデルの挙動について研究した。(i)の研究では、マルコフ過程の最尤法とモーメント法によるパラメータの推定、推定量の漸近的性質、検定問題、既存のモデルとの比較、そして、モデル選択に関する考察を行った。また、これらの理論を実際に風向の時系列データへと応用した。(ii)の研究としては、誤差分布としてKato and Jones (2010)による非対称分布を採用したマルコフモデルに関する考察、および、マルコフ過程を拡張した自己回帰過程について研究した。今年度の研究により、昨年提案したマルコフ過程をデータへ当てはめる際に必要な統計的推測の理論において幾つかの結果を得ることが可能となった。また、これらの性質を生かし、実際に風向の時系列データへ当てはめることで、気象現象を予測するための1つのモデルを提案することに成功した。そして、その拡張を考えることにより、より複雑な挙動を示す時系列データに対しても当てはめを期待できる2つのモデルを与えることができた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- ① Kato, S.、Jones, M.C.、A family of

distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation, Journal of the American Statistical Association, 査読有、Vol.105、249–262、2010

- ② Eguchi, S.、Kato, S.、Entropy and divergence associated with power function and the statistical application, Entropy, 査読有、Vol.12、262–274、2010
- ③ Kato, S.、A distribution for a pair of unit vectors generated by Brownian motion, Bernoulli, 査読有、Vol.15、898–921、2009
- ④ Kato, S.、A Markov process for circular data, Research Memorandum (統計数理研究所)、査読無、Vol.1086、1–23、2009
- ⑤ Faravani, M.、Baki, B.B.、Kato, S.、Shimizu, K.、Sim, C.H.、Effects of intra-plant competition on the ensuing spatial branching patterns of Straits Rhododendron, Research Journal of Environmental Sciences, 査読有、Vol.3、427–438、2009
- ⑥ Kato, S.、Jones, M.C.、A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation, Technical Report (Department of Mathematics and Statistics, The Open University)、査読無、Vol.08/07、1–34、2008、<http://stats-www.open.ac.uk/TechnicalReports/KJJASA.pdf>
- ⑦ Kato, S.、Shimizu, K.、Shieh, G.S.、A circular–circular regression model, Statistica Sinica, 査読有、Vol.18、633–645、2008
- ⑧ Kato, S.、Shimizu, K.、Dependent models for observations which include angular ones, Journal of Statistical Planning and Inference, 査読有、Vol.138、3538–3549、2008
- ⑨ Siew, H.-Y.、Kato, S.、Shimizu, K.、The generalized  $t$ -distribution on the circle, 応用統計学、査読有、Vol.37、1–16、2008

[学会発表] (計11件)

- ① Kato, S.、A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation, Two-Day Conference on Statistics and Probability, 2010年1月22日、Indian Statistical Institute、コルカタ、インド
- ② 加藤昇吾、Jones, M.C.、A family of distributions on the circle with links

- to Möbius transformation、科研費研究集会「非対称分布の統計学」、2009年11月25日、慶應義塾大学、横浜、日本
- ③ Kato, S.、A Markov process for circular time series、Directional, Asymptotic, Differential-Geometric Statistics and Related Area、2009年11月6日、大阪府立大学、堺、日本
  - ④ Siew, H.-Y.、加藤昇吾、The generalized  $t$ -distribution on the circle、2009年度 統計関連学会連合大会、2009年9月8日、同志社大学、京田辺、日本
  - ⑤ Kato, S.、Jones, M.C.、A family of distributions on the circle arising from Brownian motion、The 1st Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting、2009年6月29日、Seoul National University、ソウル、韓国
  - ⑥ 加藤昇吾、Jones, M.C.、A family of asymmetric distributions on the circle arising from Brownian motion、日本数学会 2009年度年会、2009年3月27日、東京大学、東京、日本
  - ⑦ 加藤昇吾、A family of asymmetric distributions on the circle with links to Möbius transformation、統計数理研究所 平成20年度 研究報告会、2009年3月18日、統計数理研究所、東京、日本
  - ⑧ Kato, S.、Jones, M.C.、An asymmetric extension of the wrapped Cauchy distribution、Workshop on Directional Statistics 2008、2008年12月22日、統計数理研究所、東京、日本
  - ⑨ 加藤昇吾、A family of asymmetric distributions on the circle with links to Möbius transformation、統計サマーセミナー2008、2008年8月3日、奥河口湖 足和田ホテル、富士河口湖町、日本
  - ⑩ Kato, S.、Jones, M.C.、A family of asymmetric distributions on the circle with links to Möbius transformation、The Seventh World Congress in Probability and Statistics、2008年7月15日、National University of Singapore、シンガポール
  - ⑪ Kato, S.、A Markov process for time series of circular data、2008 Joint Meeting of Indian Statistical Institute, the Institute of Statistical Mathematics, and Institute of Statistical Science, Academia Sinica、2008年6月19日、Academia Sinica、台北、台湾

[その他]

ホームページ等

[http://www.ism.ac.jp/souran/kenkyusya/kato\\_shogo.html](http://www.ism.ac.jp/souran/kenkyusya/kato_shogo.html)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

加藤 昇吾 (KATO SHOGO)

統計数理研究所・数理・推論研究系・助教

研究者番号：60468535

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし