

機関番号：52301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740068

研究課題名（和文） 高連結グラフの分割問題と禁止部分グラフに関する研究

研究課題名（英文） A STUDY ON PARTITION PROBLEMS IN HIGHLY CONNECTED GRAPHS
AND FORBIDDEN SUBGRAPHS

研究代表者

藤田 慎也 (FUJITA SHINYA)

群馬工業高等専門学校・一般教科・講師

研究者番号：60424206

研究成果の概要（和文）：本研究では、グラフ理論の連結度の分野における頂点分割問題に関する Thomassen 予想の解決に向け、禁止部分グラフの研究視点からその部分的解決に取り組んだ。その結果、当該分野において有用な結果を多数得ることが出来た。

研究成果の概要（英文）：In this research, I focused on the Thomassen's conjecture concerning a partition problem in graph connectivity. I worked on this problem in view of the study on forbidden subgraphs and tried to get some partial results. As a result, I could obtain many nice results in this area.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：組合せ論、グラフ理論

1. 研究開始当初の背景

連結な有限無向単純グラフにおいて、どの $k-1$ 頂点を取り除いても連結性を保つようなグラフを k 連結グラフと呼ぶ。

連結度の高いあるグラフを二つの部分グラフでもともに連結度の高いものに分割するという問題について、1981年に Thomassen がある予想を提起していた（予想のステートメントについては「2. 研究目的」で詳述）。

グラフ理論の問題は帰納法で解けるものが多い。上述した高連結グラフの分割問題について、理想的な型の定理が得られれば、分割されたそれぞれの部分グラフに帰納法の仮定が適用出来て様々な構造定理を得ること

とが期待出来ることから、この予想は多くの研究者の注意を引いたが予想解決は困難を極め、30年近くほとんど進展がなく、手詰まり気味であった。

高連結グラフの分割問題については、先行研究ではほとんど何も知られていないが、それに関連する可縮辺の存在に関する研究が北欧やドイツなどで活発に行われている。 k 連結グラフのある辺に対して、その両端点を同一視し、それによって生じるループや多重辺を除去するという操作を縮約といい、縮約しても k 連結性を保つ辺のことを可縮辺という。辺を縮約したグラフの連結度が下がらなければ、グラフの頂点数に関する帰納法が適用できるため、可縮辺の研究はグラフ理論

の諸分野で重要な役割を果たしている。一例を挙げると、Thomassen は頂点数 5 点以上の 3 連結グラフは可縮辺を含むことを示し、その事実を用いて Tutte の車輪定理と呼ばれる 3 連結グラフの構造定理や、平面グラフの特徴付けを与えた Kroutovsky の定理に簡明な別証明を与えることに成功している。

可縮辺の両端点を除去しても、得られたグラフの連結度は元のものと比べて高々 1 し下がるので、可縮辺によって誘導される 2 頂点部分グラフ B と、その可縮辺の両端点を除去したときに残る $(k-1)$ 連結グラフ A を上で述べたグラフの分割問題として捉えたと、二つの部分のうち、一方 (B 側) が 2 頂点完全グラフを誘導し、もう一方 (A 側) が連結度の高い全域部分グラフを誘導するというグラフの分割構造として解釈出来る。

従って、上述した高連結グラフの分割問題に関する研究は、可縮辺に関する研究を含む発展的研究として位置付けることが出来、そこで得られる結果に対してグラフ理論の幅広い分野において様々な応用を期待することが出来る。

私はこれまでグラフの連結度の研究とは別に、密なグラフの次数条件がもたらす内部構造の把握 (グラフにおける長いサイクルや正則因子の存在など) について精力的に研究してきた。その研究過程において、しばしば問題となっていたのは、辺の分布が極端に偏っているようなグラフの部分構造の把握であった。そのようなグラフの構造を突き詰めて研究すると、そのグラフは連結度の高い部分グラフを含むことが分かり、その部分構造を解明するためには連結度の研究が不可欠であることをかねてから痛感していた。このような経緯により、私は Thomassen 予想の解決を本研究の主要課題として選定し、これまで研究してきた禁止部分グラフや密なグラフの極値構造の研究を発展させる形で予想解決に取り組みながら、グラフ理論全体の研究を進展させる狙いで本研究計画を立ち上げた。

2. 研究の目的

本研究の主要目的は、先に述べた 1981 年にデンマーク工科大学の C.Thomassen によって提起された高連結グラフの分割問題に関する次の予想について部分的、もしくは、可能であれば全面的解決を与えることであった。予想の正確なステートメントは、以下のように記述される。

Thomassen 予想. 『 a, b を $a \geq b \geq 1$ なる整数とする. 任意の $(a+b+1)$ 連結グラフは、その頂点集合 V について互いに素な二つの部分集合 A, B で、 $V = A \cup B$ 、かつ、 A

は a 連結グラフを、 B は b 連結グラフをそれぞれ全域部分グラフとして誘導するように分割出来る.』

この予想の解決は非常に難しく、Thomassen 自身が $b \leq 2$ の場合について部分的に解決して以降、30 年近く経過した現在でも、 $b = 3$ の場合すら未解決のままという状況である。私は予想解決をめざすアプローチとして、あるグラフを誘導部分グラフとして含むことを禁止したグラフの族に関する構造定理の開発・利用を試みることにした。それに伴い、禁止部分グラフに関する研究も連結度の研究と並行して進め、禁止部分グラフ・連結度相互に有用な応用性の高い新しい定理を得ることも研究目的の一つとした。

3. 研究の方法

私は予想における $b = 3$ の場合の解決、及び、予想の結論部分を「 $A : (a \pm \varepsilon)$ 連結、 $B : (b \pm \mu)$ 連結」型に置き換えた弱いバージョンについて証明することを本研究における当面の目標とし、そこで得られた成果を足がかりにして一般の場合の予想の全面的解決をめざすことにした。

Thomassen 予想を解決するためには、任意の k 連結グラフ G において、取り除いても連結度があまり下がらない、非分離部分グラフ B として連結度の高いものを見つければよい。なぜなら、そのような部分グラフ B が見つければ、 $A = G - B$ として所望の分割 A, B が得られるからである。そのような非分離部分グラフが存在するための条件を禁止部分グラフの観点から研究を進めることで、高連結グラフの内部構造の把握をめざした。

研究の具体的な計画としては、本研究の研究期間を 3 年と定め、初年度を主に Thomassen 予想解決に必要な知識の構築・情報収集に当て、初年度で得た知識をもとに 2 年目を本格的な禁止部分グラフ・連結度の研究に当てることにした。3 年目は、2 年目で得られた成果をもとに Thomassen 予想の解決に取り組み、成果発表に当てることとした。研究全体を通じて、国内外の研究者との積極的な情報交換・ディスカッションを行う機会を大事にし、多角的視点に立つて問題解決をめざした。

4. 研究成果

禁止部分グラフの研究視点により当該研究を進めた結果、Thomassen 予想の部分的解決となる有用な結果を多数得ることが出来た。

成果として 10 編を超える論文が権威ある

学術雑誌に採録され、学会発表では日本数学会応用数学分科会において特別講演を行う機会もいただいた。

以下では、後述する「5. 主な発表論文等」で挙げた主要な雑誌論文①～③における研究成果について報告する。

雑誌論文①について：

これは高連結グラフにおける禁止部分グラフに関する研究成果の一つである。先に述べたように、高連結グラフにおける可縮辺の存在は高連結グラフの分割問題と深く関連しており、帰納法による証明手法の観点からもグラフ連結度の分野において重要な研究テーマの一つとされている。可縮辺は2頂点からなる連結グラフであるが、これを拡張して3頂点連結部分グラフで縮約しても全体の連結度を変えないような非分離部分グラフの存在に関する研究は、高連結グラフの分割問題と関連して重要な研究テーマの一つとして位置付けられている。

私は国立情報学研究所の河原林氏との共同研究により、論文①において、そのような3頂点連結部分グラフの存在を強いるためのグラフの禁止構造を決定することに成功した。そのような禁止構造とは、大雑把に記述すると、頂点数の小さいシーターグラフと呼ばれるグラフの族であり、この論文では、「全ての高連結グラフは頂点数が6点以下のシーターグラフを含むか、または縮約しても連結度が変わらないような3点連結部分グラフを含む」という定理を証明した。

雑誌論文②について：

先述のように Thomassen は、自身が提起した予想における $b = 2$ の場合について肯定的な解決を与えた。それは次のようなステートメントとして記述される。

Thomassen の定理.『全ての k 連結グラフは取り除いても連結度が高々 3 しか下がらないようなサイクルを含む.』

サイクルは 2 連結部分グラフであり、そのようなサイクルを取り除いたグラフは $(k - 3)$ 連結であるため、 $a = k - 3$ 、 $b = 2$ とおけば上の定理が Thomassen 予想の $b = 2$ の場合の解決になっていることが分かる。

私は国立情報学研究所の河原林氏との共同研究により、論文②において、この Thomassen の定理のサイクルをパリティ付きサイクルに拡張した結果として、『全ての k 連結グラフは取り除いても連結度が高々 4 しか下がらない偶数点サイクルを含む.』という定理を証明することに成功した。

上述の Thomassen の定理は、1980 年代に得られた古典的で重要な結果であり、グラフ連

結度の研究の随所で何度も引用されている。これをパリティ付きバージョンに拡張した本結果は当該分野の結果を約 30 年ぶりに進展させた大きな研究成果であり、組合わせ論のトップジャーナルの 1 つである *Combinatorica* に掲載された。

雑誌論文③について：

Thomassen 予想解決に向けた研究の過程で高連結グラフがグラフのある頂点彩色と密接に関連しているという事実を発見し、2 分の n 連結グラフ (n はグラフの頂点数とする) に関する頂点彩色の観点からの特徴付けを得ることが出来た。 k 連結グラフの非自明な特徴付けに関しては、 $k = 2, 3$ の場合はグラフ理論の古典的結果としてグラフ理論のどの専門書にも載っているが、 k が 4 以上のときは未解決であり、2 分の n 連結という高連結グラフの非自明な特徴付けを与えた点において本研究成果は当該分野の研究を大きく進展させたと言える。この成果をまとめた論文は離散数学のトップジャーナルの 1 つである *SIAM Journal on Discrete Mathematics* に掲載された。

尚、本研究はポルトガル、New University の Liu 氏が群馬高専に共同研究で私を訪問した際に得られた研究成果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① 藤田慎也、河原林健一、Contractible small subgraphs in highly connected graphs、*Graphs and Combinatorics*、査読あり、26 巻 2010 p.499-p.511
- ② 藤田慎也、河原林健一、Non-separating even cycles in highly connected graphs、*Combinatorica*、査読あり、30 巻 2010 p.565-580
- ③ 藤田慎也、Henry Liu、The balanced decomposition number and vertex connectivity、*SIAM Journal on Discrete Mathematics*、査読あり、24 巻 2010 p.1597-p.1616

[学会発表] (計 5 件)

- ① 藤田慎也、Non-separating even cycles in highly connected graphs、日本数学会秋季総合分科会、2008 年 9 月 25 日、東京工業大学
- ② 藤田慎也、Proper connection in graphs、日本数学会年会、2010 年 3 月 25 日、慶應義塾大学
- ③ 藤田慎也、グラフの edge-coloring に関する最近の話題 (特別講演)、日本数学会秋

季総合分科会、2010年9月22日、名古屋大学

〔図書〕(計1件)

- ① 藤田慎也, 他、オーム社、ITText 離散数学、2010年10月21日、256

〔産業財産権〕

該当なし

○出願状況(計0件)

名称: 該当なし

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況(計◇件)

名称: 該当なし

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.nat.gunma-ct.ac.jp/Souran/shizen/fujita.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 慎也 (FUJITA SHINYA)

群馬工業高等専門学校・一般教科・講師

研究者番号: **60424206**

(2) 研究分担者

(該当なし)

研究者番号:

(3) 連携研究者

(該当なし)

研究者番号: