

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901
 研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2008～2011
 課題番号：20740073
 研究課題名（和文）
 調和写像分散流の初期値問題のエネルギー空間での適切性の研究
 研究課題名（英文）
 On well-posedness of the Cauchy problem to Schrödinger maps in the energy space
 研究代表者
 加藤 淳 (Jun Kato)
 名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
 研究者番号：00432237

研究成果の概要（和文）：本研究では、調和写像分散流（シュレディンガー写像）の初期値問題の適切性を考察した。その過程で球面方向の滑らかさを考慮に入れたシュレディンガー方程式に対するストリッカーツ型評価の興味深いケースが得られた。

研究成果の概要（英文）：

We consider the well-posedness of the Cauchy problem to Schrödinger maps. In the process of study, we proved endpoint Strichartz estimates for the Schrödinger and Klein-Gordon equation adding angular regularity.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

1. 研究開始当初の背景

2つのリーマン多様体間の調和写像（ラプラス方程式 $\Delta u=0$ の一般化）は、測地線や極小部分多様体などを例に含む概念であり、これまでに多くの研究がなされている。また、調和写像を自然に時間発展させた写像は、調和写像熱流（熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ の一般化）として知られており、調和写像の研究に重要な役割を果たしたことは良く知られている。

調和写像分散流は、リーマン多様体の特別なものであるケーラー多様体に値を取る調和写像を、ケーラー多様体に付随する概

複素構造を用いてシュレディンガー方程式 ($\partial_t u = i\Delta u$) のように時間発展させたものとして定式化される。調和写像分散流の上記のような定式化は通常のシュレディンガー方程式の形式的な一般化に見えるが、対応する物理的モデルがあることが知られている。実際、 \mathbb{R}^2 から2次元単位球面 S^2 への調和写像分散流は、強磁性体のスピンを記述するハイゼンベルクモデルと同じものとなっている。

幾何学的な背景を持つ偏微分方程式として、波動写像と調和写像分散流は近年盛んに研究がなされている。波動写像はアイン

シュタイン方程式に対称性を仮定することで導出されることが知られているが、波動写像が近年研究される契機となったのは、

[KM] S. Klainerman, M. Machedon, Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), 1221--1268.

による、非線型波動方程式の非線型項が零形式という特別な形ならば、一般の非線型項を持つ非線型波動方程式より滑らかさの低い初期値に対し時間局所解が構成出来るという結果である。数理物理に現れる非線型波動方程式の非線型項は、しばしば零形式で表され、そのような方程式でこれまで不可能であった自然なエネルギー空間での可解性が期待された。非線型偏微分方程式の研究において、初期値の大きさによらず時間大域解が構成出来るかどうかは重要な問題であり、エネルギー空間での可解性は、エネルギー保存則を利用することが可能になるという点で、問題解決への重要なステップとなる。

波動写像の満たす方程式は丁度、非線型項が最も簡単な型の零形式である非線型波動方程式となっているため、上記の結果及びその後の進展が応用出来る問題の一つとして、次の予想がなされていた。

(I) 初期値 $(u(0), \partial_t u(0)) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n/2$ ならば初期値問題は時間局所適切,

(II) 初期値 $(u(0), \partial_t u(0)) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$, $s = n/2$ かつそれらが小さいならば時間大域適切,

(III) 初期値 $(u(0), \partial_t u(0)) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$, $s < n/2$ ならば初期値問題は不適切

ここで、初期値問題が時間局所または時間大域適切であるとは、初期値問題の解が(時間局所または時間大域的に)一意に存在し、その解は初期値に対し連続的に依存するという事がある。また、 $H^s(\mathbb{R}^n)$ は \mathbb{R}^n 上のソボレフ空間で、 s 階以下の微分が 2 乗可積分である関数の空間を表す。

予想に現れる $n/2$ という数字は、波動写像の方程式を不変に保つ時空の尺度変換を用いて予想された値である。

波動写像に関する上記の予想は現在ではほぼ肯定的に解決されている。特に臨界の場合である予想 (II) の解決には、方程式の非線型項の零形式の構造を用いるだけでは不十分であり、多様体への写像であるという幾何学的性質を用いることが重要な役割を果たした。

調和写像分散流に関しても波動写像と同様の予想がなされており、 $n/2$ という数字も同じであるが、予想 (I) に関しても完全には示されていない。これは、波動写像、調和写像分散流の方程式はそれぞれ、非線型項に微分を含む型の非線型波動方程式、非線型シュレディンガー方程式となるが、非線型項に微分を含む型の非線型シュレディンガー方程式の扱いが非線型波動方程式より難しいことによる。

この問題に関しては、 $n=2$ の場合に関する論文

[KK] Jun Kato, Herbert Koch, Uniqueness of modified Schrödinger maps in $H^{3/4+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$, *Comm. Partial Differential Equations* **32** (2007), 415--429.

があり、 $s > 7/4 (> 2/2=1)$ であれば初期値問題が時間局所適切であることが示されていた。初期値 $u(0)$ が小さい場合は、 $s > n/2$ で初期値問題が時間局所適切であることが

[B] I. Bejenaru, On Schrödinger maps, preprint (arXiv: math.AP/0604255).

により示されていた。この結果において、初期値の小ささの条件を外せるかどうかは未解決であった。

一方、予想 (II) に関しては、最近 $n \geq 4$ の場合には

[BIK] I. Bejenaru, A. D. Ionescu, C. E. Kenig, Global existence and uniqueness of Schrödinger maps in dimensions $n \geq 4$, preprint (arXiv: math.AP/0607579).

により示されているが、 $n=2, 3$ の場合は未解決であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、最も単純な場合である \mathbf{R}^2 から 2 次元単位球面 S^2 または 2 次元双曲空間 \mathbf{H}^2 への調和写像分散流の、初期値問題の小さな初期値に対する時間大域適切性を、エネルギー空間 $H^1(\mathbf{R}^2)$ を目標として出来るだけ低い滑らかさのソボレフ空間に属する初期値に対して考察することであった。

3. 研究の方法

この問題に関しては、まず初期値の滑らかさの条件をある程度緩めて時間大域解の存在について考察を進めた。そのための基礎となる、球面方向の滑らかさを考慮に入れたシュレディンガー方程式に対するストリッカーツ型評価について整備した。

一方、空間次元 $n=2, 3$ の場合にはエネルギー空間の近くでこの問題を扱うには、方程式の非線形項の零形式に相当する構造を用いることが必要となる。また、波動写像の場合と同様に、滑らかさが臨界的な場合を扱うには、方程式の非線形項が零形式の形であることを用いるだけでは不十分であり、方程式の幾何学的性質（ゲージ変換）が重要な役割を果たすと考えられる。そのため、波動写像の場合に Tao が

[T1] T. Tao, Global regularity of wave maps I, Small critical Sobolev norm in high dimension, Internat. Math. Res. Notices (2001), no. 6, 299--328.

[T2] T. Tao, Global regularity of wave maps II, Small energy in two dimensions, Comm. Math. Phys. **224** (2001), 443--544.

で導入した超局所的なゲージ変換もしくは

[T3] T. Tao, Geometric renormalization of large energy wave maps, (arXiv: math.AP/0411354).

で導入された付随する熱流を利用する方法を利用して考察を進める。

4. 研究成果

研究成果の一つとしては、球面方向の滑らかさを考慮に入れたシュレディンガー方程式およびクライン・ゴルドン方程式に対するストリッカーツ型評価が挙げられる(下記文献 2)。またそれらの非線形方程式に対する簡単な応用については下記文献 1 にまとめられている。また、時空共鳴法の適用についても考察し、下記文献 3 の結果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

1. Jun Kato, Tohru Ozawa, A remark on global solutions to nonlinear Klein-Gordon equation with a quadratic nonlinearity in two space dimensions, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B14** (2009), 17--25, 査読有。

2. Jun Kato, Tohru Ozawa, Endpoint Strichartz estimates for the two dimensional Klein-Gordon equation and some applications, J. Math. Pures Appl. **95** (2011), 48--71, 査読有。

3. Jun Kato, Fabio Pusateri, A new proof of long range scattering for critical nonlinear Schrödinger equations, Differential Integral Equations **24** (2011), 923--940, 査読有。

[学会発表] (計 6 件)

1. Endpoint Strichartz estimates for the two dimensional Klein-Gordon equation and some applications, RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」, 2008 年 7 月 8 日, 京都大学数理解析研究所。

2. Endpoint Strichartz estimates for the two dimensional Klein-Gordon equation and some applications, Asymptotics and Singularities in Nonlinear and Geometric Dispersive equations, 2008 年 8 月 28 日, BIRS (Banff, Canada)。

3. 角度方向の滑らかさと Strichartz 型評価について, RIMS 短期共同研究「非線形双曲型及び分散型方程式の解の挙動について」, 2009 年 5 月 28 日, 京都大学数理解析研究所。

4. A new approach to the derivation of asymptotic behavior on the small solution to the critical nonlinear

Schrödinger equations, Harmonic Analysis and PDE, 2010年8月19日, Seoul National University (Seoul, Korea).

研究者番号：

5. Endpoint Strichartz estimates for the two dimensional Klein-Gordon equation and some applications, Analysis Seminar, 2010年9月20日, Johns Hopkins University (Baltimore, USA).

6. Contraction mapping principle for the Hartree equation of the long range type, 第29回九州における偏微分方程式研究集会, 2012年1月25日, 九州大学

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計◇件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 淳 (Jun Kato)

研究者番号：00432237

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()