

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 28 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20740075

研究課題名（和文） 特殊関数の恒等式について

研究課題名（英文） Identities between Special Functions

研究代表者

ビジュナス ライマンダス (VIDUNAS RAIMUNDAS)

神戸大学・自然科学系先端科学融合研究環重点研究部・助教

研究者番号：00467680

研究成果の概要（和文）：Appell 関数の Gauss 超幾何関数への 1 変数特殊化の分類を行った。その特別な場合には, dihedral Gauss 超幾何関数と terminating rectangular Appell 超幾何級数との関係

を示すものがある。同様に, dihedral 超幾何関数の quadratic invariant は, Clausen の恒等式を一般化したものにより, terminating 2 重超幾何級数で表される。

Filipuk と van Hoiej との共同研究により, Heun 関数と Gauss 超幾何関数の間の pullback 変換を分類した。全部で, 61 個の parametric transformation と hyperbolic な場合に 366 個の transformation が見つかった。

さらに Marta Mazzocco と共同で, Painleve VI 方程式と isomonodromic system の transformation について研究を行った。

研究成果の概要（英文）：I classified univariate specializations of Appell's functions to Gauss hypergeometric functions. One particular case relates explicitly dihedral Gauss hypergeometric functions to terminating rectangular Appell's hypergeometric sums. Similarly, the quadratic invariant for the dihedral hypergeometric functions was expressed as a terminating double hypergeometric sum by generalizing Clausen's identity. Together with Filipuk and van Hoiej, I classified pull-back transformations between Heun and Gauss hypergeometric functions. In total, 61 parametric transformations and 366 transformations in the hyperbolic case were found. Finally, I worked with Marta Mazzocco on transformations of Painleve VI equations and their isomonodromic systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
総 計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：特殊関数

科研費の分科・細目：数物系科学, 基礎解析学

キーワード：超幾何関数, Appell 関数, Heun 関数, Painleve 方程式, Belyi map,

1. 研究開始当初の背景

当初の動機は，特殊関数（特に超幾何関数，Appell 関数，Heun 関数，Painleve 関数）間の関係式と変換を調べることであった．

Gauss 超幾何関数の pullback 変換の分類は既に行っており，類似の手法を Painleve VI 方程式の代数的解の研究に応用した (A. Kitaev との共同研究)．

これら変換の最も特殊な場合の詳細な記述と，Heun 関数や 2 変数超幾何関数の同様の場合について自分の研究を拡張しようとした．

他の動機としてはこうして得られた変換を応用や，直交多項式，Leonard pair の研究，それらの物理や時系列解析に応用であった．

2. 研究の目的

Gauss 超幾何関数の代数的，dihedral，楕円積分の特殊な場合をより詳しく調べようとした．

次の目的は，特殊関数から Heun 関数，Painleve 関数，Appell 関数への pullback 変換の分類を拡張することであった．超幾何関数と多変数超幾何関数（たとえば Appell 関数など）の特殊な場合について，興味深い関係式が成り立つことが期待された．

これら関数の pullback 変換にはよく Belyi covering が現れる．Belyi covering を計算する私の手法は今まで知られている方法よりも，効率がよく，より高い次数の Belyi covering を計算することが可能であった．それなので，Belyi map を計算する効率の良いアルゴリズムを作成しようとした．

3. 研究の方法

主な手法は，今考えている特殊関数の様々な変換を，計算代数システム Maple を使って計算させることである．超幾何関数，Heun 関数，Painleve 関数の変換の shape space，パラメータ空間は，モノドロミー指数の間の関係や Diophantus 不等式により制限される．Appell 関数と Gauss 超幾何関数の間の変換の空間はさらに制限される．こうして得られた多く公式はかなり複雑になる．

Marta Mazzocco, Mark van Hoeij, Galina Filipuk, Robert Maier との共同研究を行った．

4. 研究成果

一番重要な成果は，Appell 関数の Gauss 超幾何関数への 1 変数特殊化の分類である．その中のある特殊な場合は，terminating rectangular Appell 超幾何級数の dihedral モノドロミーを持つ Gauss 超幾何関数への特殊化に関係する．これにより，dihedral Gauss 超幾何関数の明示的な式が得られる．

さらに，二変数超幾何級数（一般化 Appell や $3F_2$ 関数）の特殊な場合は，Gauss 超幾何関数の 2 乗に関係する．それにより Clausen の恒等式は一般化され，dihedral Gauss 超幾何関数の quadratic invariant は，一般型の terminating rectangular 超幾何級数により表される．それゆえ finite dihedral group を持つ Gauss 超幾何関数の pullback 変換は明示的に表される．

Galina Filipuk と共同で，パラメトリックな Heun, Gauss 超幾何関数の間の pullback 変換を分類した．この分類は完成し，プレプリントとして arxiv:1204.2730 と arxiv:0910.3087v2 に

公開している(論文は投稿中である). 次数 12 までの 61 個の変換を見つけることができた.

類似の研究として, Mark van Hoeij と共同で, Heun 関数と hyperbolic 型の Gauss 超幾何関数の間のすべての pullback 変換の分類を行った. 全部で, 次数 60 次までで, 366 個の変換が見つかった. これら変換のすべての Belyi map を計算することができ, それらに対応する dessins d'enfant (ある種の図である) を描画することができた. これら変換のいくつかは 15 次までの algebraic number field 上に定義され, 定義される体が不明ないくつか興味深い Belyi map が見つかっている. この研究については完成の最終段階にある.

さらに, Marta Mazzocco と共同で, Painleve VI 方程式とその isomonodromic system の間の(次数 2, 3, 4 の)変換についての研究を行った.

その一つの拡張とし Painleve VI 方程式の Picard, Hitchin の場合の高次の変換(これは modular curve に対応する)を計算した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

1. M. Mazzocco, R. Vidunas, Cubic and quartic transformations of the sixth Painleve equation in terms of Riemann-Hilbert correspondence, Studies in Applied Mathematics (掲載決定)
2. R. Vidunas, Transformations and

invariants for dihedral Gauss hypergeometric functions, Kyushu J. Math., Vol. 66 (2012), 143-170

3. R. Vidunas, Dihedral Gauss hypergeometric functions, Kyushu J. Math., Vol. 65 (2011), 141-167
4. R. Vidunas, A generalization of Clausen's identity, Ramanujan J., Vol. 26 (2011), 133-146
5. R. Vidunas, On singular univariate specializations of bivariate hypergeometric functions, J. Math. Anal. Appl., Vol. 365 (2010), 135-141
6. R. Vidunas, Specialization of Appell's functions to univariate hypergeometric functions, J. Math. Anal. Appl., Vol. 355 (2009), 145-163
7. R. Vidunas, Algebraic transformations of Gauss hypergeometric functions, Funkcial. Ekvac., Vol. 52 (2009), 139-180
8. R. Vidunas, A. Kitaev, Computation of highly ramified coverings, Math. Comp., Vol. 78 (2009), 2371-2395
9. R. Vidunas, Askey-Wilson relations and Leonard pairs, Discrete Math, Vol. 308 No 4 (2008), 479-495

[学会発表] (計 10 件)

1. R. Vidunas, "Klein's pullback coverings for algebraic Heun functions", アクセサリー・パラメーター研究会, 2012 年 3 月 16

- 日，熊本大学
2. R. Vidunas, "Isogeny transformations of the Picard and Hitchin solutions of the sixth Painleve equation", 超幾何方程式研究会, 2012 年 1 月 7 日, 神戸大学
 3. R. Vidunas, "Analysis of Spline Curvature", 3rd Annual Fall School "Shapes, Geometry and Algebra", September 30, 2011, Vilnius
 4. R. Vidunas, "Formulas for tetrahedral Gauss hypergeometric functions", The 11th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (OPSFA11), August 30, 2011, Madrid
 5. R. Vidunas, "Transformations between Heun and hypergeometric functions of the hyperbolic type", 超幾何方程式研究会 2011, 2011 年 1 月 5 日, 神戸大学
 6. R. Vidunas, "Transformations between Heun and hypergeometric equations", RIMS Workshop "Analytic Number Theory through Value Distribution and other Properties of Analytic functions", 2010 年 10 月, 京

都大学数理解析研究所

7. R. Vidunas, "Transformations between Heun and hypergeometric equations" 超幾何方程式研究会 2010, 2010 年 1 月 6 日, 神戸大学
8. R. Vidunas, "Bootstrapping for detection of regime changes in the Dow Jones time series", ASNA-2009 (Asia), October 3, 2009, Ritsumeikan University
9. R. Vidunas, "Relations between double hypergeometric sums and univariate hypergeometric functions", OPSFA10 conference, July 20-25, 2009, Leuven, Belgium
10. R. Vidunas, "Investigating identities between Appell's and univariate hypergeometric functions", FoCM' 08 (Foundations of Computational Mathematics), 2008 年 6 月 24 日, City University of Hong Kong

6. 研究組織

(1) 研究代表者

ビジュナス ライマンダス (VIDUNAS
RAIMUNDAS)

神戸大学・自然科学系先端融合研究環重点
研究部・助教

研究者番号 : 00467680