

平成23年 6月 7日 現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740076

研究課題名 (和文)

確率解析を用いた無限次元空間上のヘルマンダー型微分作用素に関する研究

研究課題名 (英文) Stochastic analysis and the Hörmander type operators
on infinite dimensional spaces

研究代表者

河備 浩司 (KAWABI HIROSHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：80432904

研究成果の概要 (和文)： 無限次元空間上のヘルマンダー型微分作用素および対応する確率過程について、マリアヴァン解析、Rough Path 理論、確率偏微分方程式、Dirichlet 形式を用いて研究を行った。このうち経路空間上の Gibbs 測度に関する Riesz 変換の成果の一部は論文として出版された。また以前の微分作用素の一意性問題の研究の枠組を拡張することにより、この問題の理解をさらに深めることができ、微分作用素の一意性だけでなく Dirichlet 形式のアプローチから確率偏微分方程式の一意的強解を構成することができた。この成果は国内外の研究集会で発表され、論文は専門学術誌に投稿中である。また、ループ空間上のブラウン運動を例とする無限次元確率過程に関する振動型汎関数積分の漸近挙動を、Rough Path 理論とマリアヴァン解析を組み合わせて研究し、今後の研究の方向性をつかんだ。

研究成果の概要 (英文)： I studied some properties on the the Hörmander type operators on infinite dimensional spaces by applying Malliavin calculus, rough path analysis, SPDEs, and Dirichlet form. In particular, I proved strong uniqueness of Dirichlet operators for Gibbs measures on an infinite volume path space, and constructed a unique strong solution for the corresponding SPDE via the Dirichlet form approach. Besides, I studied precise asymptotic behavior of some functional integrations for a class of infinite dimensional stochastic processes which include the Brownian motion on loop spaces .

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率解析、マリアヴァン解析、Rough Path 理論、微分作用素、一意性問題、Riesz 変換、経路空間、Gibbs 測度

1. 研究開始当初の背景

| 解析学や幾何学では様々な場面でヘルマ

ンダー型微分作用素が重要な対象として登場するが、この作用素が生成する拡散半群は、ブラウン運動をインプットとする確率微分方程式の解を用いた汎関数積分表示を持ち、この作用素の解析に確率解析の立場が重要となる。また確率解析の手法は状態空間が無限次元の場合でも有効に働くという利点は見逃せない。本研究は、この立場から量子物理学、幾何学などにあらわれる無限次元空間上のヘルマンダー型微分作用素の解析理論の構築を目論んで開始したものである。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記の状況を考慮して

- (1) 抽象 Wiener 空間上の退化したヘルマンダー型微分作用素の解析
- (2) Rough Path 理論を用いた無限次元確率過程の解析、特に汎関数積分の漸近挙動の精密化
- (3) 場の量子論から派生した経路空間上の Gibbs 測度に関するヘルマンダー型作用素(Dirichlet 作用素)の一意性問題および解析理論の構築、特に Riesz 変換の有界性の研究を行う。

3. 研究の方法

研究課題に関連する基本文献・論文を自らの手で分析し、新たな計算を行い、共同研究者との議論を行い、理解を深めていった。また関連分野の専門家との情報交換も重要である。特に(3)の一意性問題に関しては、ある程度満足のいく成果が得られたので、国内外の研究集会・確率論セミナーで口頭発表を行い、参加者からのアドバイスを合わせて、結果の更なる改良を行い、最終的にはプレプリント[1]を作成し、専門学術誌に投稿した。

特に、本研究費の2009年度・2010年度分を用いて2010年1月から半年間、Cambridge 大学 Isaac Newton 数理科学研究所で行われた確率偏微分方程式に関する長期研究プログラムに参加することが出来たのは大変有意義であった。滞在中に共同研究者の Sergio Albeverio, Michael Röckner 両氏との議論を重ねて論文を作成できた事はもちろんであるが、様々な研究者の講演、情報交換を通して、研究に対する新たな視点を得た。

また「岡山解析・確率セミナー」に、他大学から講演者を招き、関連分野の情報収集を行ったが、数人分の旅費を科研費からサポートすることができたのもありがたかった。

4. 研究成果

- (1) 抽象 Wiener 空間上のヘルマンダー型微分作用素が生成する拡散半群のエルゴード性についての研究を行った。 Ornstein-

Uhlenbeck 作用素が生成する半群がエルゴード性を持つことは、L. Gross により古くから知られており、この研究は Gross の結果の一般化・無限次元化・精密化につながるものである。現時点では、カギとなりうるある評価式を得ているが、更なる精密化が必要な状況でもある。次年度以降の研究で継続して行っていく。

(2) P. Malliavin によって定式化されたループ空間上の Brown 運動などを例に持つ Banach 空間値の確率過程に関する振動型汎関数積分の漸近挙動を研究した。これは以前の稲浜譲氏との Laplace 法に関する共同研究の続編で、Rough Path の意味での「確率 Taylor 展開」がカギとなる。(この概説論文は論文[2]として出版された。)この研究では、以前の結果とマリアヴァン解析の部分積分公式を組み合わせることが重要となり、この準備のために、近年の P. Friz による Rough Path 版マリアヴァン解析の研究の検討に多くの時間が費やされた。最終的には、原点に立ち戻り、J-M. Bismut のマリアヴァン解析の考え方が我々の問題には有効であるという知見を得ることができた。詳細の検討は次年度以降の研究で引き続き行っていく。

(3) 経路空間上の Gibbs 測度に対するヘルマンダー型微分作用素の解析に関してであるが、以前の Röckner 氏との共同研究で得られた本質的自己共役性と、重川一郎氏による半群の交換性に関する研究を組み合わせ、Riesz 変換の有界性を Littlewood-Paley 不等式を通して得ることができた。証明のスケッチは論文[3]で公表したが、現在は(有限体積) $P(\varphi)_2$ -モデルや Hoegh-Krohn モデル ($\exp(\varphi)_2$ -モデル) も取り込めるように、本論文の枠組の更なる拡張を行っている状況である。これは次年度以降の研究で引き続き行っていく。また関連するテーマとして、(Hoegh-Krohn モデルの toy モデルとしての) $\exp(\varphi)_1$ -モデルに対するヘルマンダー型微分作用素に関する一意性が、そもそも未解決問題であることを Albeverio 氏から指摘され、共同研究が始まった。このモデルおよび以前の研究で現れる Gibbs 測度は、有限次元空間上の Schrödinger 作用素の基底状態を通して定まることはよく知られており、この研究にて、基底状態の decay の精密評価がカギとなっていることの理解が深まった。また Dirichlet 形式を通して対応する拡散過程が得られるが、確率偏微分方程式での特徴付けの際にも、この精密評価が大いに役立ち、最終的には、この確率偏微分方程式の一意的強解を構成することもできたのは、意外な収穫であった。この研究はある意味で、1980 年代の岩田耕一郎氏の研究成果への別

アプローチにもなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

[1] S. Albeverio, H. Kawabi and M. Röckner, “Strong uniqueness for both Dirichlet operators and stochastic dynamics to Gibbs measures on a path space with exponential interactions”, Isaac Newton Institute Preprint Series: NI10013-SPD, 2010. (査読無)

[2] H. Kawabi, “Topics on diffusion semigroups on a path space with Gibbs measures”, Proceedings of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, RIMS Kokyuroku Bessatsu B6, 2008, pp. 153-165. (査読有)

[3] Y. Inahama and H. Kawabi, “On the Laplace-type asymptotics and the stochastic Taylor expansion for Ito functional of Brownian rough paths”, Proceedings of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, RIMS Kokyuroku Bessatsu B6, 2008, pp. 139-152. (査読有)

[学会発表] (計 22 件)

[1] 河備浩司, 「Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, 筑波大学解析セミナー, 筑波大学数理物質科学研究科, 2011年2月23日.

[2] 河備浩司, 「Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, 科研費シンポジウム「Markov過程と関連する話題」, 関西大学システム理工学部, 2011年1月29日.

[3] H. Kawabi, 「Precise asymptotics for infinite dimensional Ito-Lyons maps of Brownian rough paths」, 科研費シンポジウム「Probability and PDE 2011」, 広島大学大学院工学研究科, 2011年1月12日.

[4] 河備浩司, 「Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」, 岡山大学理学部, 2010年11月13日.

[5] 河備浩司, 「Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, 東京確率論セミナー, 東京工業大学大学院理工学研究科, 2010年11月1日.

[6] 河備浩司, 「Strong uniqueness of diffusions to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, 科研費シンポジウム「第13回広島解析セミナー」, 広島大学大学院工学研究科, 2010年8月23日.

[7] H. Kawabi, 「On uniqueness of Dirichlet operators to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, Welsh Probability Seminar, Mathematics Department, Swansea University, 2010年5月27日.

[8] H. Kawabi, 「On uniqueness of Dirichlet operators to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, Stochastic Analysis Seminar, School of Mathematics, Loughborough University, 2010年5月12日.

[9] H. Kawabi, 「On uniqueness of Dirichlet operators to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, (臨時) Stochastic Analysis Seminar, School of Mathematics, University of Manchester, 2010年5月10日.

[10] 河備浩司 「On uniqueness of Dirichlet operators to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, 岡山解析・確率セミナー兼数理物理セミナー, 岡山大学理学部, 2010年4月16日.

[11] H. Kawabi, 「Precise asymptotics for infinite dimensional Ito-Lyons maps of Brownian rough paths」, Workshop: Rough Paths, SPDEs and Related Topics, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge, 2010年4月6日.

[12] H. Kawabi, 「On uniqueness of Dirichlet operators to Gibbs measures on a path space with exponential interactions」, Stochastic Analysis Seminar, Mathematical Institute, University of Warwick, 2010年3月17日.

[13] H. Kawabi, 「On Dirichlet operators of $\exp(\varphi)_1$ -quantum fields in infinite volume」, First CIRM-HCM joint meeting: Stochastic Analysis, SPDEs, Particle Systems, Optimal Transport, Levico Terme, Trento, 2010年1月26日.

[14] H. Kawabi, 「Riesz transforms associated with diffusion operators on a path space with Gibbs measures」, Oberseminar Stochastische Prozesse, Mathematical Institute, University of Leipzig, 2009年11月5日.

[15] H. Kawabi, 「Precise asymptotics for infinite dimensional Ito-Lyons maps of Brownian rough paths」, Forschungsseminar Stochastische Analysis und Stochastik der Finanzmärkte, Institute of Mathematics, TU-Berlin, 2009年11月2日.

[16] 河備浩司, 「Riesz transforms associated with diffusion operators on a path space with Gibbs measures」, 科研費シンポジウム「確率論とPDE」, 広島大学大学院工学研究科, 2009年1月20日.

[17] 河備浩司, 「Riesz transforms and stochastic analysis (A survey talk)」, 科研費シンポジウム「仙台放物型・楕円型方程式研究集会」, 東北大学大学院理学研究科, 2008年11月8日.

[18] H. Kawabi, 「The parabolic Harnack inequality and related topics on a path space with Gibbs measures」, Open Seminar on Stochastics, Department of Mathematics, TU-Darmstadt, 2008年11月4日.

[19] H. Kawabi, 「Riesz transforms associated with diffusion operators on a path space with Gibbs measures」, Oberseminar Stochastik, SFB611, Institute of Applied Mathematics, University of Bonn, 2008年10月23日.

[20] H. Kawabi, 「Riesz transforms associated with diffusion operators on a path space with Gibbs measures」, Bielefeld Stochastic Afternoon, SFB701, Faculty of Mathematics, University of Bielefeld, 2008年10月22日.

[21] H. Kawabi, 「Riesz transforms associated with diffusion operators on a Path space with Gibbs measures」, 臨時Stochastic Analysis Seminar, Oxford-Man Institute, University of Oxford, 2008年8月27日.

[22] H. Kawabi, 「Riesz transforms on a path space with Gibbs measures」, The 1st MSJ-SI (Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute) Probabilistic Approach to Geometry (Contributed Talk), 京都大学時計台記念館国際交流ホール, 2008年8月1日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者
河備 浩司 (KAWABI HIROSHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：80432904

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし

