

機関番号：13101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740078

研究課題名(和文) 非線形偏微分方程式の未知係数同定逆問題の再構成理論について

研究課題名(英文) On reconstruction problems in inverse problems of determining unknown coefficients for non-linear partial differential equations

研究代表者

渡邊 道之(WATANABE MICHUYUKI)

新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授

研究者番号：90374181

研究成果の概要(和文): (1)平面内の摩擦を生じる媒質を伝播する波を表す方程式(偏微分方程式)の数学解析を行い、(ある条件のもとで)摩擦の効果によって波が散乱されること、散乱された波のデータから媒質中の摩擦係数を(ある条件のもとで)一意に同定できること、を証明した。(2)棒状の弾性体の振動を表すモデル方程式(非線形波動方程式)の数学解析を行い、棒の両端での計測データから物体の特性を表す物理係数を一意に同定できることを証明した。

研究成果の概要(英文): (1) We give the existence of outgoing eigen-function and its scattering amplitude for the two dimensional stationary wave equation with a friction term. We also prove in two dimensions that the friction coefficient is uniquely reconstructed from the scattering amplitude at a fixed low energy. (2) We study the inverse boundary value problem of determining a field-dependent coefficient for the non-linear wave equation in one space dimension. We prove that a linear part and a quadratic part of the field-dependent coefficient are uniquely reconstructed from the boundary measurements.

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：(1) 偏微分方程式 (2) 散乱理論 (3) 逆問題

## 1. 研究開始当初の背景

物理的現象を特徴づける物理係数は、しばしば偏微分作用素の係数に現れる。様々な計測ではこれらの物理係数を求める問題、すなわち偏微分方程式の係数同定逆問題が重要となる。例えば、標的に粒子をぶつけ散乱された粒子を観測し、そのデータから標的の物理的性質を決定するという逆散乱問題。物体の

表面に電流を流し一定時間経過した後、その物体の表面での電圧を計測し、これらのデータから物体の伝導率を決定するという境界値逆問題などがある。これらの問題で決定しようとしている未知の物は、偏微分方程式の係数として記述される。このような問題を理論的に解析する際、これまでの研究の主流は、実数値関数を係数にもつ線形偏微分方程式を

モデル方程式として導入し、個々の方程式に対して様々な解析を行うことであった。いうまでもなく、未知係数を計測データから具体的に構成する手続き（以下、再構成手続きと呼ぶ）を与えることが応用上あるいは実用上最も重要である。

ところで、現実の物理現象の多くは非線形であり、そのモデル方程式は必然的に非線形偏微分方程式となる。モデル方程式が線形の場合は多くの研究があるが、非線形方程式の逆問題研究は揺籃期にあった。

このような状況の中で、本研究では主に3つの具体的な方程式に着目した。それぞれの学術的背景は以下のとおりである。

- (1) 摩擦係数をもつ波動方程式の定常問題を考えると、複素数値関数を係数にもつ定常シュレーディンガー方程式となる。シュレーディンガー方程式の散乱問題と逆散乱問題はこれまでに多くの研究成果があるが、それらはおもに空間3次元以上の場合であり、空間2次元の場合は、限定された状況の場合しかわかっておらず、さらに複素数値係数の場合はほとんど研究成果が得られていなかった。
- (2) 非線形偏微分方程式の逆問題研究は、非線形楕円型、非線形放物型の場合にいくつかの結果が知られていた。結果の多くは一意性と安定性に関するものであった。不思議なことに、非線形双曲型に対する逆問題研究は全くといってよいほど注目されてこなかった。一意性、安定性といった基本的な研究もほとんど得られていなかった。
- (3) 量子力学における多体問題を近似的に取り扱うために導出されたハートレー・フォック方程式は、非線形シュレーディンガー方程式の連立系となる。1973年、MORAWETZ-STRAUSS によって初めて非線形偏微分方程式に対する逆散乱問題を扱った論文が発表され、以来研究が進み、WEDERの研究により『べき乗型』といわれる非線形項を持つ方程式に対する逆散乱問題は完成された。ハートレー・フォック方程式の非線形項は『べき乗型』とは異なり、非局所的である。このような『べき乗型』とは異なる非線形項を持つ方程式に対しては、代表者が中心になって研究を行ってきた。これまでの研究では、主に単独方程式に対して、特殊な形をした係数の場合に再構成手続きを与え

ることに成功している。しかし、連立系に対しては特殊な場合を除いて再構成手続きはまだ与えられていなかった。

## 2. 研究の目的

- (1) 偏微分方程式の逆問題は、大域的な性格を持つため、意味のある一般論を構築することは極めて困難である。そこで、本研究では以下の3つの方程式に的を絞って、それぞれの方程式の係数をそれぞれの場合の観測データから具体的に構成する再構成手続きを与えることを、方程式の特徴を活かして研究する。

複素ポテンシャルを持つ2次元シュレーディンガー作用素の散乱問題と逆散乱問題について考察する。解の漸近展開式を導き、散乱振幅を構成すること。散乱振幅から複素ポテンシャルを再構成することを目的とする。

非線形波動方程式の逆境界値問題について考察する。空間1次元で線形項と2次の非線形項をもつ波動方程式の初期値境界値問題の解の性質を解析し、境界のデータから線形項と非線形項の係数を再構成することを目的とする。

ハートレー・フォック方程式の逆散乱問題について考察する。解の遠方での挙動を解析し、それを表す散乱作用素から非線形項に現れる未知関数を再構成することを目的とする。

- (2) 複素数値関数を係数にもつ偏微分方程式、および非線形項をもつ偏微分方程式の逆問題については基礎結果が少ないため、具体的な方程式を研究対象とし、個々の問題を解くことで基礎結果を積み上げ将来の展望へとつなげる。

## 3. 研究の方法

- (1) 非線形偏微分方程式 と の非線形項を再構成する逆問題の研究については、まずそれぞれの方程式のコーシー問題が一意に解けること、すなわち順問題を解かなければならない。非線形偏微分方程式の逆問題では、初期値を小さく絞って問題を線形化する手法が現在のところ最も有効な方法であるため、順問題は小さな初期値に対して解けば十分である。非線形偏微分方程式の散乱問題、非線形波動方程式の初期値・境界値問題、共に豊富

な研究結果が知られている。これらを本研究で扱う方程式とに逆問題の解析に適した形(関数空間)で応用、整理することから始めた。具体的には、観測データである散乱作用素及びディリクレ・ノイマン写像をテラー展開することから解析した。順問題で準備した評価式及び、観測データのテラー展開を利用し、それぞれの方程式に対して逆問題の線形化を行った。その後、非線形項の係数を具体的に構成する再構成手続きを、とそれぞれの場合に対して考察した。

- (2) の問題については、摂動論、振動積分の漸近展開および関数解析的手法を中心に散乱振幅の構成を行った。逆問題の解析については、散乱の逆問題を境界値逆問題に帰着させる手法を用いた。境界値逆問題の解析には、複素幾何光学解と呼ばれる特殊解を用いた解析方法を応用した。
- (3) 本研究は、主に文献、専門書、インターネットを利用して研究室にて手計算中心に行った。非線形方程式に関する研究テーマについては、中村玄氏(北海道大学)、Barbara Kaltenbacher氏(ドイツ)と共同で行い、E-mailによる議論をするとともに、必要に応じて出張し大学にて研究打ち合わせを行った。研究成果は国内学会および国際会議で発表し、専門家と研究結果に関する情報交換や議論を行い、さらなる発展の可能性などを探った。

#### 4. 研究成果

- (1) 平面内の摩擦を生じる媒質を伝播する波を表す波動方程式の定常問題を考えることで、複素ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の問題におきかえ「3. 研究の方法(3)」の方法により、次の結果を得ることができた。(ある条件のもとで)摩擦の効果によって波が散乱されることを証明した。周波数を1つ固定した散乱波のデータから平面内の媒質中の摩擦係数を(ある条件のもとで)一意に同定できることを証明した。エネルギーを1つ固定した場合の散乱の逆問題は、空間3次元以上(多次元)の場合は優決定の問題、すなわち未知関数よりも既知関数の独立変数の方が多い問題である。一方、空間2次元の場合は未知関数と既知関数はともに2変数の関数となり、多次

元の場合と問題の構造が異なっている。そのため2次元の場合は多次元の場合とは違った様々な数学的困難が生じる。これらを解決することは逆問題の数学解析にとって重要な課題となっている。本研究で、2次元における逆問題で生じる数学的困難を解決する1つのアプローチを提示することができた。この研究結果は、層状媒質といった、より複雑な問題にも応用できる可能性がある。空間2次元における研究結果は、数値実験への応用へと発展する可能性を秘めている。本研究で得られた結果は具体的な再構成法を与えているという点で、今後、数値実験の研究へと発展することが期待できる。この研究結果は国際会議「International Conference on Inverse Problems and Applications」で招待講演者として発表させていただいた。このことから、この研究結果は国際的にも高い評価を得ているとよいであろう。

- (2) 圧電体の特性を表す物理係数を表面での計測データから同定する問題を、棒状の弾性体の振動を表すモデル方程式(非線形波動方程式)の逆問題へと帰着させることで、それらの物理係数を一意に同定できることを証明した。本研究で得られた結果は、近似的にはあるが、有限個の計測データから物理係数を具体的に求める再構成手続きをあたえており、とくに物理係数が定数である場合には、数値実験も可能な公式であることを実証している。このことから、この研究結果は逆問題の数学理論のみならず、応用上も重要な位置を占める。今後は本研究で得られた空間1次元の結果をもとにして、より高い次元(空間2次元以上)の問題へと発展させていく。この研究結果は国際専門誌「Inverse Problems」に掲載された。
- (3) ハートリー方程式の解の散乱状態から決まる「ある量」が小さければ、方程式に含まれる未知のポテンシャルの大きさも小さくなるか、という逆問題の安定性について考察し、安定性が得られるような「ある量」を具体的に定め、基本的な計算を行い、今後の研究の指針を与えた。残念ながら研究期間内では定理として結論できるまで研究を進めることはできなかった。しかし、ハートリー方程式のみならず、非線形偏微分方程式の散乱の逆問題の安定性に関しては、驚くべきことにほとんど注意が払われなかったことを

思えば、この研究機関内で得た基本的方針は、今後の非線形偏微分方程式の散乱の逆問題の研究をさらに発展させる契機となるであろう。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

渡邊道之、Two-dimensional inverse problem for Schrödinger equation with a complex coefficient、数理解析研究所講究録別冊、査読有、B16 巻、2010、175-194

渡邊道之、On inverse boundary value problems for the two dimensional Schrödinger equation with complex-valued potentials (in Japanese)、Seminar Notes of Mathematical Sciences、査読無、12 巻、2009、216-224

中村玄、渡邊道之、Barbara Kaltenbacher、On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave equation、INVERSE PROBLEMS、査読有、Vol. 25、2009、035007 (16pp.)

[学会発表](計2件)

渡邊道之、Inverse scattering problem for stationary wave equation with a friction term in two dimensions、International Conference on Inverse Problems and Applications、2009年8月17日、Hanbat National University、Daejeon、Korea

渡邊道之、複素ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の境界値逆問題、日本数学会、2008年9月26日、東京工業大学

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

渡邊 道之 (WATANABE MICHYUKI)

新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授  
研究者番号：90374181

(2)研究分担者

該当者なし( )

研究者番号：

(3)連携研究者

該当者なし( )

研究者番号：