

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月20日現在

機関番号： 32660

研究種目： 若手研究 (B)

研究期間： 2008~2011

課題番号： 20740079

研究課題名（和文） 複素ギンツブルク・ランダウ型方程式

研究課題名（英文） Complex Ginzburg-Landau type equations

## 研究代表者

横田 智巳 (YOKOTA TOMOMI)

東京理科大学・理学部第一部・准教授

研究者番号： 60349826

研究成果の概要（和文）：複素ギンツブルク・ランダウ方程式は数学と物理学に双方にまたがり盛んに研究されている。本研究の目的は、複素ギンツブルク・ランダウ方程式とそれに関連する方程式に関する未解決問題を含む諸問題を解決することである。より詳しくは、それらの方程式の解が存在するかどうかを明確にすることが主な問題である。その目的はほとんど達成され、先行研究を改良する新しい結果が得られただけでなく、簡潔な証明を与えることにも成功した。

研究成果の概要（英文）：The complex Ginzburg-Landau equation is intensively studied both in Mathematics and in Physics. The purpose of this research is to solve some problems including open questions concerning the complex Ginzburg-Landau equation and related equations. More precisely, the problem is to clarify whether solutions to those equations exist or not. Almost all the purpose is achieved, and not only new results improving the previous works are established, but also simple proofs are also successfully given in this research.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 関数方程式

## 1. 研究開始当初の背景

複素ギンツブルク・ランダウ方程式は、数学と物理学の双方にまたがり盛んに研究されている。実際、アメリカ数学会の MathSciNet で検索すると、180本を超える論文をみつけることができる。最近では、方程式の一部を変形して考察する研究が出始めている。そのような研究の動向から、これまで研究されて

いない複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の研究を行うには、適切な時期であるといえる。

.

## 2. 研究の目的

本研究では、通常の複素ギンツブルク・ランダウ方程式も含む形で一般化した方程式や関連する方程式を研究対象とすることによ

って、従来の研究を発展させることを目的とする。より詳しくは、複素ギンツブルク・ランダウ方程式とそれに関連する方程式の解が存在するかどうかを明確にすることが主な研究目的である。

### 3. 研究の方法

複素ギンツブルク・ランダウ型方程式(CGLT)とその特別な場合である非線形シュレディンガー型方程式(NLST)を主な対象として、以下の研究を行う。

(1) (CGLT)とその特別な場合である(NLST)の時間大域的可解性の研究を行う。具体的には(CGLT)と(NLST)に対する大域的弱解と大域的強解の存在と一意性に関する結果を導き、(CGLT)については解作用素の平滑化作用を示す。

(2) (CGLT)に対する大域的アトラクターが存在することを明確にする。関連する研究として、全空間における複素ギンツブルク・ランダウ方程式の初期値問題に対して、通常は利用できないコンパクト性の方法からのアプローチを試みる。

(3) (CGLT)と(NLST)の爆発解についての研究を行う手がかりとして、(CGLT)と同じ放物型偏微分方程式である準線形退化型ケラー・シーゲル系(KS)についての研究を行う。Sugiyama-Kunii (2006)による先行結果の改良を目指す。

(4) (CGLT)と(NLST)との関係についての研究を行う。特に(CGLT)におけるラプラシアンの前にかかる複素係数の実部を0に近づけるときに(CGLT)の解が(NLST)の解に収束することとその収束のオーダーを調べる。さらに空間2次元の場合に解の一意性も含めて結果の改良を試みる。

### 4. 研究成果

研究の方法で述べた(1)から(4)に対応して以下の研究成果が得られた。

(1) (CGLT)と(NLST)に時間大域的な解が存在するかどうかを考察し、(CGLT)と(NLST)に対する大域的弱解と大域的強解の存在と一意性に関する結果を得ることに成功した。さらに、(CGLT)については解作用素の平滑化作用が得られることも明確にした。これらの結果は線形項のラプラシアンを  $p$  ラプラシアンに非線形化しても成立する、ということまで明らかにした。

(2) (CGLT)に対する大域的アトラクターが存在することを明確にした。また、全空間にお

ける複素ギンツブルク・ランダウ方程式の初期値問題に対して、コンパクト性の方法からの非常に簡潔なアプローチが可能であることを明確にした。本研究により、従来の複雑な証明を改善できたという点で意義は大きいと思われる。

(3) ある条件下での準線形退化型ケラー・シーゲル系(KS)の大域的弱解の存在について、Sugiyama-Kunii (2006)の結果を大幅に改良する結果を得ることができた。さらに、異なる条件の下では(KS)の解の爆発を示唆する結果を得ることも成功した。それらの結果は解の存在と爆発を分ける藤田臨界指数の一般化で記述されることから、(KS)に対する研究の手法が、将来的に(CGLT)の爆発解についての研究にも役立つことが十分に期待できる。

(4) (CGLT)におけるラプラシアンの前にかかる複素係数の実部を0に近づけるときに(CGLT)の解が(NLST)の解に収束することを示すことができた。これにより、これまで独立に研究されていた両者をつなぐことができた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Sachiko Ishida, Tomomi Yokota,  
Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type with small data,  
Journal of Differential Equations, 252, 2469-2491, 2012, 査読有
- ② Sachiko Ishida, Tomomi Yokota,  
Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type,  
Journal of Differential Equations, 252, 1421-1440, 2012, 査読有
- ③ Tomomi Yokota,  
Monotonicity method applied to complex Ginzburg-Landau type equations,  
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 380, 455-466, 2011, 査読有
- ④ Philippe Clement, Noboru Okazawa, Hiroshi Tamura, Tomomi Yokota,  
Cauchy problem for the complex Ginzburg-Landau equation with harmonic oscillator,  
京都大学数理解析研究所講究録, 1746, 100-111, 2011, 査読無

- ⑤ Noboru Okazawa, Hiroshi Tamura, Tomomi Yokota,  
Square Laplacian perturbed by inverse fourth-power potential. I Self-adjointness (real case),  
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A-Mathematics, 141A, 409-416, 2011, 査読有
- ⑥ Noboru Okazawa, Tomomi Yokota,  
Subdifferential operator approach to strong wellposedness of the complex Ginzburg-Landau equation,  
Discrete and Continuous Dynamical Systemes, 28, 311-341, 2010, 査読有
- ⑦ Takeshi Kojima, Tomomi Yokota,  
Generation of analytic semigroups by generalized Ornstein-Uhlenbeck operators with potentials,  
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 364, 618-629, 2009, 査読有
- ⑧ Tomomi Yokota, Noboru Okazawa,  
The complex Ginzburg-Landau equation (an improvement),  
GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 29, 463-475, 2008, 査読有

[学会発表] (計 18 件)

- ① 横田智巳、全空間における複素 Ginzburg-Landau 方程式の初期値問題に対するコンパクト性の方法、  
日本数学会年会実函数論分科会、2012 年 3 月 28 日、東京理科大学
- ② 側島基宏、Maximal domain of Analyticity for  $C_0$ -semigroups generated by elliptic operators in  $L^p$ , (II)、  
日本数学会年会実函数論分科会、2012 年 3 月 28 日、東京理科大学
- ③ 鈴木敏行、Abstract formulation of energy methods for nonlinear Schrödinger equations、  
日本数学会年会函数方程式論分科会、2012 年 3 月 28 日、東京理科大学
- ④ 石田祥子、準線形退化放物・放物型 Keller-Segel 系の小さな初期値に対する大域的弱解の存在、  
日本数学会年会函数方程式論分科会、2012 年 3 月 28 日、東京理科大学
- ⑤ 横田智巳、複素 Ginzburg-Landau 方程式に対するコンパクト性の方法、  
第 100 回神楽坂解析セミナー、2012 年 1 月 28 日、東京理科大学
- ⑥ 横田智巳、A simple approach to the Cauchy problem for complex Ginzburg-Landau equations via compactness methods、  
第 37 回発展方程式研究会、2011 年 12 月 24 日、岐阜大学
- ⑦ 鈴木敏行、Energy methods for abstract nonlinear Schrödinger equations、  
第 37 回発展方程式研究会、2011 年 12 月 24 日、岐阜大学
- ⑧ 石田祥子、Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type with small data、  
第 37 回発展方程式研究会、2011 年 12 月 24 日、岐阜大学
- ⑨ 鈴木敏行、逆 2 乗型ポテンシャル項つき非線形 Schrödinger 方程式の大域的適切性、  
日本数学会秋季総合分科会実函数論分科会、2011 年 9 月 29 日、信州大学
- ⑩ 石田祥子、準線形退化 Keller-Segel 系の大域的弱解の存在、  
日本数学会年会函数方程式論分科会、2011 年 3 月 22 日、早稲田大学
- ⑪ 側島基宏、Maximal domain of Analyticity for  $C_0$ -semigroups generated by elliptic operators in  $L^p$ 、  
日本数学会年会実函数論分科会、2011 年 3 月 21 日、早稲田大学
- ⑫ 石田祥子、準線形退化 Keller-Segel 系の大域的弱解の存在について、  
第 36 回発展方程式研究会、2010 年 12 月 23 日、中央大学
- ⑬ 横田智巳、Cauchy problem for the complex Ginzburg-Landau equation with harmonic oscillator、  
Nonlinear evolution equations and related topics to mathematical analysis of a phenomena、2010 年 10 月 14 日、  
京都大学数理解析研究所
- ⑭ 横田智巳、特異性をもつポテンシャルつきの 4 階楕円型作用素の自己共役性とその周辺、  
第 509 回 応用解析研究会、2010 年 6 月 19 日、早稲田大学
- ⑮ 横田智巳、Smoothing effect for complex Ginzburg-Landau type equations with p-Laplacian、  
日本数学会年会実函数論分科会、2010 年 3 月 26 日、慶應義塾大学
- ⑯ 横田智巳、Generation of analytic semigroups by generalized Ornstein-Uhlenbeck operators with Potentials、  
日本数学会秋季総合分科会実函数論分科会、2009 年 9 月 25 日、大阪大学
- ⑰ 横田智巳、Monotonicity method applied to complex Ginzburg-Landau type equations、  
日本数学会秋季総合分科会実函数論分科会、2009 年 9 月 25 日、大阪大学
- ⑱ 横田智巳、複素 Ginzburg-Landau 方程式の  $L^p$  理論に向けて、  
日本数学会秋季総合

分科会実函数論分科会、  
2008年9月27日、東京工業大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

横田 智巳 (YOKOTA TOMOMI)  
東京理科大学・理学部第一部・准教授  
研究者番号：60349826

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：