様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　７日現在

機関番号：３３９０３
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2008～2011
課題番号：２０７４００８１
研究課題名（和文）　双曲正多角形を基本領域にもつリーマン面とクライン面の研究

研究課題名（英文）　Study on Riemann surfaces and Klein surfaces with hyperbolic regular polygons as their fundamental regions

研究代表者
中村　豪（NAKAMURA GOU）
愛知工業大学・工学部・准教授
研究者番号：50319208

研究成果の概要（和文）：極値的クライン面にはいくつの極値的円板を埋め込むことができるかという問題に対して解決を与えた。そして種数が４，５，６の極値的クライン面を，極値的円板の個数，埋め込み位置，自己同型群の点から分類を行った。これには基本領域である双曲正多角形を用いた。双曲正多角形を基本領域にもつ種数２のリーマン面に対しては，ワイエルシュトラス点に基づいて基本領域を再構成することでタイヒミュラー空間の方程式を与え，そして同次座標を与えた。

研究成果の概要（英文）：We solved the problem that how many extremal discs are embedded in extremal Klein surfaces, and classified these surfaces by the number of extremal discs, location of extremal discs, and the group of automorphisms. For this aim we used hyperbolic regular polygons as their fundamental regions. As for Riemann surfaces of genus two with hyperbolic regular polygons we gave equations of the Teichmüller space and homogeneous coordinates for the surfaces by reconstructing fundamental regions based on the Weierstrass points.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：複素解析、関数論、解析学、リーマン面、クライン面、基本領域、極値的円板

１．研究開始当初の背景

種数ｇのコンパクトリーマン面上に作用する反等角自己同型写像の固定点集合は，高々ｇ＋１個の単純閉曲線になるという A. Harnack の古典的な結果がある。この反等角自己同型写像や単純閉曲線（オーバル）は E. Bujalance, D. Singerman, S. M. Natanzon らにより精力的に研究され，対称リーマン面や向き付け不可能な曲面（クライン面）の研究に発展している。また、C. Bavard は曲面が向き付け可能か不可能かに応じて，曲面に埋め込める円板の最大半径を種数ｇによって与えている。最大半径の円板（極値的円板）を埋め込める曲面（極値的曲面）はどのようなものか，埋め込める最大個数はいくつか，自己同型群はどのような群か，曲面の対称性

はどうかといったさまざまな問題が考えられていた。種数ｇの双曲的な極値的曲面は，向き付け可能ならば双曲正１２ｇ－６角形に，向き付け不可能ならば双曲正６ｇ－６角形に対応しており，結果として双曲正多角形を基本領域にもつリーマン面，クライン面の研究と結びついて行くことになる。極値的曲面に埋め込める極値的円板の個数については，向き付け可能な場合は解決している。種数が４以上ならばただ一つであり，種数が２，３のときは２個以上含むものが存在する。向き付け不可能な場合は種数７以上のときにただ一つであり，種数が３のときは２個含むものが存在する。従って種数４，５，６の向き付け不可能な極値的曲面の場合が未解決であった。

２．研究の目的

本研究は極値的円板のアイデアを主な手段として，双曲正多角形を基本領域にもつ閉曲面の等角同値類による分類を行い，モジュライ空間の研究に貢献することである。具体的には次を考察することである。

(1) 双曲正多角形を基本領域にもつ種数２のコンパクトリーマン面のワイエルシュトラス点の位置の探究。

(2) 種数２のコンパクトリーマン面に対する極値的円板の中心点，ワイエルシュトラス点，オーバルの相互関係の解明

(3) 双曲正多角形を基本領域にもつ種数２と３のコンパクトリーマン面の分類

(4) 極値的円板をもつ種数４，５，６のクライン面の決定と解析

３．研究の方法

(1) リーマン面，不連続群に関連する論文や専門書を参考にして知識を深め，解析の手口となるアイデアを培った。そしてそれらをまとめることで新たな展開へと発展することができた。研究を遂行する上で，資料を入手することは極めて重要であった。

(2) 本研究課題では，研究対象のクライン面は膨大な数に上るので，コンピュータの使用は極めて重要であった。コンピュータを用いて継続的に計算を行い，データを整理しながら研究を進めた。また，計算を実行する上で数式処理ソフトの役割も大きかった。処理を迅速に行うために，プログラムの改良を重ねながら問題解決を目指した。

(3) この他に，東京や島根などのリーマン面の研究者と研究打ち合わせを行った。専門家らと議論を重ねることで，研究内容や手法について独断的になることを防ぎ，広く受け入れられる内容になるよう心掛けた。そして精度を上げることもできた。また，研究集会に参加，発表することによって有意義なコメントを広く得ることも心掛けた。

４．研究成果

(1) 等角同値でない種数３のコンパクトリーマン面３種類に対して，新たにワイエルシュトラス点の位置を求めた。これらは超楕円的なものであった。そして自己同型群を確定することもできた。

(2) ｋ個の境界をもつ単葉型クライン面で位数mの自己同型写像をもち，それによる商空間の代数的種数が素数ｐとなるものに対して，ｋ，m，ｐの関係から自己同型群を確定することができた。

(3) 基本領域が双曲正８角形である種数２のコンパクトリーマン面に対して，ワイエルシュトラス点を通る単純閉測地線を用いて，基本領域の対角が同じ大きさで，対辺が同一視される双曲８角形を構成した。この双曲正８角形から導かれる標識を付けることにより，タイヒミュラー空間上における７次元の同次座標を与えることができた。この同次座標を用いて，タイヒミュラー空間を与える方程式を構成した。

基本領域が双曲正１８角形である種数２のコンパクトリーマン面は極値的円板を含むことができるが，双曲正８角形の場合と同様に，ワイエルシュトラス点を通る単純閉測地線を用いて，基本領域を再構成し，タイヒミュラー空間上において，ある標識付きの極値的曲面の７次元同次座標を与えることができた。

(4) 極値的円板をもつ種数４，５，６のクライン面に対しては次の結果を得ることができた。

① 種数４の向き付け不可能な閉曲面（クライン面）で極値的円板を含むものは同型を除いて１４４種類存在することが示せた。極値的円板は高々２個のみ埋め込み可能であり，ちょうど２個埋め込めるものは２２種類存在する。そして２つの極値的円板の中心点は自己同型写像で写りあうことが示せた。また，この１４４種類の曲面すべてに対して極値的円板の埋め込み位置と自己同型群を確定することができた。

② 種数４の向き付け不可能な極値的閉曲面を与える NEC 群の基本領域は双曲正１８角形であるが，辺を貼り合わせるパターンを得るために，６個の頂点，９個の辺をもつ三枝グラフを求めた。

③ 種数５の向き付け不可能な閉曲面で極値的円板を含むものは同型を除いて３,６２７種類存在することが示せた。極値的円板は高々２個のみ埋め込み可能であり，ちょうど２個埋め込めるものは１７種類存在する。そして２つの極値的円板の中心点は自己同型写像で写りあうことが示せた。また，この３,６２７種類の曲面すべてに対して極値的円板の埋め込み位置と自己同型群を確定することができた。

④ 種数５の向き付け不可能な極値的閉曲面を与える NEC 群の基本領域は双曲正２４角形であるが，辺を貼り合わせるパターンを得るために，８個の頂点，１２個の辺をもつ三枝グラフを求めた。

⑤ 種数６の向き付け不可能な極値的閉曲面を与える NEC 群の基本領域は双曲正３０角形であるが，辺を貼り合わせるパターンを求めるために，１０個の頂点，１５個の辺をもつ三枝グラフを求めた。結果として貼り合わせパターンは１４９,２８８通り存在することが示せた。

⑥ 種数６の向き付け不可能な閉曲面で極値的円板を含むものは同型を除いて１４９,２７９種類存在することが示せた。また，極値的円板は高々２個埋め込み可能であり，ちょうど２個埋め込めるものは１０７種類存在することが判明した。そして２つの極値的円板の中心点のうち，自己同型写像で写りあわないものが存在することが示せた。また，この１４９,２７９種類の曲面すべてに対して極値的円板の埋め込み位置を求めることができた。そして１０７種類の曲面すべてに対しては自己同型群を確定することができた。

⑦ 種数７以上の場合には極値的円板は高々１つ埋め込み可能なので，これらの結果からすべての種数の向き付け不可能な双曲的閉曲面には高々２個の極値的円板を埋め込めることが証明できた。

(5) 種数がｇ，境界成分がm個の(ｇ,m)型リーマン面（２ｇ－２＋m＞０）からなるタイヒミュラー空間に対して，対応するフックス群の生成元から定まるトレースを用いることによってパラメータ付けを行うことができた。特に，(ｇ,０)型に対しては６ｇ－５個の変数がみたす方程式を与えることができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 5 with extremal metric discs, Glasgow Math. J. Vol.54, pp.273-281, 2012, 査読有り.

② Gou Nakamura, Teichmüller space of genus two based on Schmutz Schaller's hyperbolic polygons, Kodai Math. J. Vol.35, pp.138-156, 2012, 査読有り.

③ Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 4 with extremal metric discs, Conformal Geometry and Dynamics, Vol.13, pp.124-135, 2009, 査読有り.

〔学会発表〕（計 7 件）

① 中西敏浩, Trace parameters for Teichmüller space, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 2011 年 9 月 30 日, 信州大学.

② Gou Nakamura, Parametrizations of Teichmüller spaces by trace functions, The 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2011 年 12 月 12 日, アステールプラザ.

③ Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 5 with extremal metric discs, 日本数学会 2011 年度年会（アブストラクト）, 2011 年 3 月 22 日, 早稲田大学.

④ Gou Nakamura, Compact Klein surfaces of genus 5 with extremal discs, Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on Computational Algebraic and Analytic Geometry for Low-Dimensional Varieties, 2011 年 1 月 6 日, Sheraton, New Orleans, USA.

⑤ Gou Nakamura, Automorphism groups of q-m-gonal planar Klein surfaces, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2010 年 1 月 11 日, 名古屋大学.

⑥ Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 4 with extremal metric discs, 2nd Belgian Mathematical Society - London Mathematical Society Conference, 2009 年 12 月 4-5 日, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

⑦ Gou Nakamura, Examples of the coordinates of genus 2-surfaces with regular fundamental octagon, XXIst Rolf Nevanlinna Colloquium, 2009 年 9 月 8 日, 京都大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

中村　豪（NAKAMURA GOU）

愛知工業大学・工学部・准教授

研究者番号：50319208

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：