

機関番号：21401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740084

研究課題名（和文） 不動点問題におけるエラーバウンドの導入とその応用

研究課題名（英文） On error bounds for fixed point problems and its applications

研究代表者

松下 慎也（MATSUSHITA SHIN-YA）

秋田県立大学・システム科学技術学部・助教

研究者番号：20435449

研究成果の概要（和文）：

本研究では、不動点問題に対する実用的な求解法を開発することを目的とする。特に、逐次近似法が有限回の繰返しで解に到達することを保証する概念について研究し、新たな条件の提案とその有効性を検証する研究を行った。まず凸計画問題における最適化手法の研究をもとに、集合値写像に対する条件を提案した。また、提案した条件を応用して、凸関数の最小化問題、変分不等式など関連する非線形問題に対するアルゴリズムの収束に関する成果を得る事ができた。

研究成果の概要（英文）：

This research aims to develop efficient algorithms for solving fixed point problems. Especially, we investigated notions that guarantee sequences generated by iterative methods can obtain an exact solution in finite number of steps. First, we provided a new condition for set-valued mappings based on theoretical techniques for solving the convex programming problem. Further, by using these results, we derived finite convergence results concerning nonlinear problems such as the convex minimization problem and the variational inequality.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：不動点問題，エラーバウンド，近接点法，

## 1. 研究開始当初の背景

不動点問題とは、複雑な問題を何らかの写像を用いて表現し、その不動点を見つける問題として自然に取り扱うことができる問題である。微分方程式や経済における均衡問題など多くの重要な問題が不動点問題として記述できるため、非線形解析学における重要

な研究課題の一つとなっている。特に不動点問題に対する求解法の研究は、ニュートン法や内点法といった最適化問題に対する効率的解法が目覚ましい発展とともに近年になって急速に発展してきている。

これまでの研究によって様々な写像に対して数多くの解法が提案されており、それら

の大域的収束性を保証するための研究が活発に行われており、理論面において重要な発展を遂げている。一方、提案された解法を具体的な不動点問題に適用し、計算機上で評価するといった研究は全く不十分であり、解法の精度を評価する上で未解決な部分も多く、より洗練された理論及び具体的な数値実験をおこなう際に発生する困難の克服が急務となっている。

## 2. 研究の目的

この研究課題においては、不動点問題に対する解法の効率化について考察することを目的とする。特に、解法によって生成された点列が有限回の繰返しで解に到達することが保証できれば、計算機を援用した数値実験などによって効率的な解法の開発が期待できる。このような条件を考察するため、以下に挙げる事項の問題解決に重点を置いて研究を推進する。これらのアプローチは互いに影響しつつ発展するものであるが、それ自体興味深い研究対象でもあり、様々な理論的な応用や具体的な応用科学への利用が期待できる。

(1) 近接点法の収束性について考察する。近接点法にはエラーバウンドと呼ばれる有限回で解に到達する事を保障する条件が存在する。この条件を詳細に調べることで、不動点問題におけるそのような条件について考察する。

(2) 変分不等式に対するアルゴリズムの収束性について考察する。特に、変分不等式問題にはアルゴリズムが有限回で解に到達する事を保証する非退化性条件が知られている。この条件の詳細を考察するとともに不動点問題との関係について考察する。

(3) 集合値写像の零点問題に対する解法について考察する。これまでの解法の研究では写像の単調性が必要であったが、最近この単調性の代わりに測度正則性と呼ばれる条件を用いた解法の研究が行われている。この条件の詳細について調べることで、不動点問題への応用について考察する。

(4) 不動点問題に対する解の収束性について考察する。これまで提案されている解法について再考察し、解法が解に収束するための条件、解周辺における点列の挙動、具体例に対する数値実験による評価によって解法の収束に関する検証などによって汎用性を持った条件の導入について考察する。

## 3. 研究の方法

国内外を問わず関連する学会、研究集会に

積極的に参加して発表することで、本研究に関する意見を求めた。

関連書籍、オンラインジャーナルからの情報収集や関連分野の研究者達との研究打合せによって周辺の情報を収集しながら研究の方向性を設定した上で、新たな条件の導入とその理論的性質の解明を行った。

MATLAB などの数式処理ソフトウェアなど計算機を援用した数値実験によって本研究で得られた成果の有効性の検証などを行い、その都度得られた成果を論文としてまとめ発表した。

## 4. 研究成果

### (1) 弱尖鋭的最小値の概念の導入：

集合値写像の零点問題に対して適用された近接点法に対して、生成された点列が有限回の反復で解に到達するための条件について研究を行った。特に、有限次元空間で研究されている凸計画問題における弱尖鋭的最小値の概念を、Banach 空間における集合値写像の零点問題に適用できる条件として一般的に定式化し、その条件のもとで近接点法が有限回の繰返しで解に到達することを示した。また、得られた結果を凸関数の最小化問題に応用し、その有用性について検証した。これらの成果について、名古屋大学で開催された日本数学会 2010 年度秋季総合分科会で発表を行い学術論文にまとめた。

### (2) 2 つの写像を組み合わせた合成写像の不動点問題に関する研究：

射影と連続写像を組み合わせた合成写像の不動点問題に対して、アルゴリズムの停止条件を導入し、その理論的性質について解析した。また提案した条件を用いて、既存の解法が導入した条件を仮定すると有限回で解に到達することが保証される。これらの成果について学術論文にまとめた。

### (3) 単調性を仮定しない集合値写像に対する解法の開発：

測度正則性の条件のもとで集合値写像の零点問題の解法の開発を行った。集合値写像の零点問題に対する解法による近似列の存在証明及び解への収束について証明した。これらの成果について、中国とアメリカで開催された国際会議 (ISCM2009, ISMP2009,) で発表を行って、そのうちの 하나가学術論文として査読付会報に採択された。

### (4) 変分不等式に対するアルゴリズムの停止条件の導入：

変分不等式に対してこれまで研究されてい

た非退化性条件よりも一般的な弱尖鋭的最小値の条件について考察した。この条件を用いて Banach 空間における変分不等式に対するアルゴリズムが有限回の反復で解に到達する事を示した。この結果を変分不等式に対する近接点法に応用した。これらの成果について、早稲田大学で開催された 2011 年度日本数学会年会で発表を行い学術論文にまとめた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

[1] Shin-ya Matsushita, Li Xu, Finite termination of the proximal point algorithm in Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 387, 765-769, (2012).

[2] Shin-ya Matsushita, Li Xu, On convergence of the proximal point algorithm in Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 139, 4087-4095, (2012).

[3] Shin-ya Matsushita, Kazuhide Nakajo, Wataru Takahashi, Strong convergence theorems obtained by a generalized projections hybrid method for families of mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis: Theory, method & Applications, 査読有, 73, 1466-1480, (2010).

[4] Shin-ya Matsushita, The Fan Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem is equivalent to the Takahashi fixed point theorem, Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 査読有, 223-226, (2009).

[5] Shin-ya Matsushita, Li Xu, Asymptotic convergence analysis of the proximal point algorithm for metrically regular mappings, 査読有, Fifth International Workshop on Computational Intelligence & Applications IEEE SMC Hiroshima Chapter, Hiroshima University, Japan, November 10, 11 & 12, 270-273, (2009).

[6] Shin-ya Matsushita, Wataru Takahashi, On the existence of zero points for pseudomonotone lower samicontinuous operators in Banach spaces, Proceedings of the Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 査読有, 121-128 (2008).

[7] Shin-ya Matsushita Wataru Takahashi, Existence of zero points for pseudomonotone operators in Banach spaces, Journal of Global Optimization, 査読有, 42, 519-558, (2008).

[8] Shin-ya Matsushita. Wataru Takahashi, The sequences by the hybrid method and the existence of fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert space, Proceedings of the Eighth International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, 査読有, 109-114, (2008).

[9] Shin-ya Matsushita. Wataru Takahashi, Zero points of set-valued operators and fixed point theorems, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1611, 165-171, (2008).

[学会発表] (計 12 件)

[1] Shin-ya Matsushita, Proximal point algorithm for variational inequality problems, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会・実関数論分科会, 平成 23 年 9 月 28 日, 信州大学.

[2] Shin-ya Matsushita, Proximal point algorithm for variational inequality problems, 日本数学会 2011 年度年会・実関数論分科会, 平成 23 年 3 月 20 日, 早稲田大学.

[3] Shin-ya Matsushita, On finite termination of algorithms, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会・実関数論分科会, 平成 22 年 9 月 24 日, 名古屋大学.

[4] Shin-ya Matsushita, On finite termination of iterative methods, 京都大学数理解析研究所研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 平成 22 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所研究.

[5] Shin-ya Matsushita, On the Proximal Point Method for Metrically Regular Mappings, The 20th International Symposium of Mathematical Programming, 2009 年 8 月 24 日, Gleacher Center, Chicago, Illinois, アメリカ.

[6] Shin-ya Matsushita, A proximal type algorithm for optimization problems, The 2nd International Workshop on Institutional Supply Chain Management, 2009 年 8 月 9 日, Xi'an Jiaotong University, 中国.

[7] Shin-ya Matsushita, Fixed point theorems for set-valued operators, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA 2009), 2009年3月30日, 東京工業大学.

[8] Shin-ya Matsushita, On boundary conditions for monotone operators in Banach spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月26日, 東京工業大学.

[9] Shin-ya Matsushita, On boundary conditions for nonlinear operators in Banach spaces, The Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAD 2008), 2008年9月17日, くにびきメッセ, 松江市, 島根県.

[10] Shin-ya Matsushita, バナッハ空間における集合値写像の境界条件について, 京都大学数理解析研究所研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 2008年9月3日. 京都大学数理解析研究所.

[11] Shin-ya Matsushita, On the Existence of Zero Points of Set-valued Operators in Banach Spaces and its Applications, The inaugural Sino-Japanese Optimization Meeting (SJOM 2008), 2008年8月28日, National Cheng-Kung University, 台湾.

[12] Shin-ya Matsushita, On the existence of zero points for set-valued operators under same boundary conditions, World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA 2008), 2008年7月5日, Hyatt Grand Cypress Resort Orlando, アメリカ.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松下 慎也 (MATSUSHITA SHIN-YA)

秋田県立大学・システム科学技術学部・助教

研究者番号 : 20435449

### (2) 研究分担者

該当無し

### (3) 連携研究者

該当無し