様式 C-7-2

自己評価報告書

平成２３年５月２４日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００８ 〜 ２０１１
課題番号：２０７４００８６
研究課題名（和文）　変分構造をもつ幾何学的時間発展方程式の解の挙動に関する研究

研究課題名（英文）　On a dynamics of a solution for geometric evolution equations with a variational structure

研究代表者
高坂　良史（KOHSAKA YOSHIHITO）
室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：００３６０９６７

研究分野：非線形偏微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：表面拡散方程式、平均曲率一定曲面、Willmore 流方程式、平均曲率流方程式、

１．研究計画の概要

ある汎関数に対して、その汎関数の値が最も減る方向に関数の動きを導く方程式を勾配流方程式という。方程式が何らかの意味で勾配流方程式とみなせるとき、その方程式は変分構造をもつという。本研究では、変分構造をもつ幾何学的時間発展方程式として表面拡散方程式と Willmore 流方程式を研究対象とし、それらの方程式に対して可解性および解の挙動に関する研究を行う。具体的には、表面拡散方程式に対する定常曲面である平均曲率一定曲面や Willmore 流方程式の定常曲面である Willmore 曲面の安定性を解析し、それら定常曲面の近傍での動曲面の挙動を明らかにすることを目的とする。また、その挙動の過程で曲面に特異点が現れることが知られているが、その特異点の解析を行うことを目的とする。

２．研究の進捗状況

（１）平成２０年度〜平成２１年度にかけて、互いに交わる３つの超曲面の平均曲率流による挙動に関して研究を行った。具体的には、動曲面をある与えられた超曲面からの符号付距離関数で表し、得られた２階非線形偏微分方程式系に対して時間局所解の存在を明らかにした。この解析にあたっての難しさは、この問題が異なる超曲面上での偏微分方程式系になり、通常の理論が直接利用し難い点が挙げられる。さらに、導出された偏微分方程式系が空間に関して２次(主要部の微分の次数)の導関数を含む非局所項をもつため、通常の理論をそのままでは利用できない。本研究では、ガレルキン法やCampanato空間を用いたGiaquinta等の手法、および摂動法などを組み合わせ、これらの難点を解消し、時間局所解の存在を明らかにした。ここで得られた解析方法は、３つの超曲面の表面拡散方程式等による挙動の解析においても有効な手段となることが期待される。

（２）平成２１年度〜平成２２年度にかけて、表面拡散方程式によって動きが記述される曲面について、定常曲面の線形安定性に関する研究を行った。特に、境界付きの超曲面が軸対象という設定のもとで研究を行い、この設定のもとで表面拡散方程式に対する定常曲面の線形安定性の判定基準の導出を試みた。対象が境界付きの超曲面であるため、解析に際して境界条件が必要となるが、境界条件としてはエネルギーを最小にするという観点から自然に導かれる角度条件と平均曲率の１次導関数に関する条件を課した。曲面が平行面の間にある場合に関してはVogel等の研究結果があるため、境界面がより一般的な場合に関して研究を進めた。方法としては、方程式を定常曲面の周りで線形化し、得られた線形化方程式(この場合は変数係数の常微分方程式)の固有値を解析することによって行う。現在この線形化方程式の詳細な解析を行っている段階である。

３．現在までの達成度

③ やや遅れている。

(理由)

境界付きの超曲面が軸対象という設定のもとでの表面拡散方程式に対する定常曲面の線形安定性に関する研究は、当初は平成２２年度中にある程度の結果を得ることを目標としていた。しかし、実際に線形化を行っ

てみた結果、想定していた方程式よりも複雑な係数をもった方程式が導かれ、その方程式の検討・解析に時間を要し、目標とする研究結果を得ることができなかった。よって、達成度としては「③ やや遅れている」と評価する。

４．今後の研究の推進方策

（１）境界付きの超曲面が軸対象という設定のもとでの表面拡散方程式に対する定常曲面の線形安定性に関する研究については、線形化して得られた方程式は想定していたよりも複雑な係数をもつ方程式であったが、検討の結果 Sturm-Liouville 型の方程式であることは確認できたので、Sturm-Liouville 型方程式の固有値に関する文献を調査・検討し、そこで得た方法を本研究の解析に応用し、研究を進める。また、曲面が平行面の間にある場合については、Vogel や非等方的平均曲率一定曲面に対する Koiso 等の研究結果があるので、それらの結果との比較・検討を行い、相違点を明確にしながら、研究を進めていく。

（２）時間発展の過程で曲面に特異点が現れる場合の研究については、特異点論の研究者と研究協力を行い進めていく。また、平均曲率流に関しては Huisken と Sinestrar が Ricci 流の解析方法を応用して特異点をまたいだ動曲面の解析を行っているので、その解析方法が表面拡散方程式あるいは Willmore 流方程式へ応用可能かどうか検討し、その検討結果を踏まえ研究を進めていく。

５． 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① H. Garcke, K. Ito, Y. Kohsaka, Surface diffusion with triple junctions : A stability criterion for stationary solutions, Advances in Differential Equations, 査読あり, 15, 2010, 437-472.

② H. Garcke, K. Ito, Y. Kohsaka, Stability analysis of phase boundary motion by surface diffusion with triple junction, Banach Center Publications, 査読あり, 87, 2009, 83-101.

③ H. Garcke, Y. Kohsaka, D. Sevcovic, Nonlinear stability of stationary solutions for curvature flow with triple junction, Hokkaido Mathematical Journal, 査読あり, 38, 2009, 721-769.

〔学会発表〕（計４件）

① 髙坂良史, Stability analysis of steady states for surface diffusion equation in a bounded domain, 学際的国際会議とチュートリアルセミナー「結晶成長の数学的側面」, 2010年7月30日, 北海道大学.

② 髙坂良史, On evolving hypersurfaces with boundaries by mean curvature flow, 研究集会「変分問題の展開－幾何学的勾配流と臨界点理論の新潮流」, 2010 年６月７日, 京都大学数理解析研究所.

③ 髙坂良史, Motion of phase boundaries by geometric evolution equations, Oberwolfach Workshop, 2010 年２月２日, Oberwolfach(ドイツ).

④ 髙坂良史, Phase boundary motion by surface diffusion with triple junction, SIAM Conference on Mathematical Aspects of Materials Science, 2008 年５月 13 日, Philadelphia (アメリカ).