様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年６月１１日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００８　～　２０１１
課題番号：２０７４００８６
研究課題名（和文）　変分構造をもつ幾何学的時間発展方程式の解の挙動に関する研究

研究課題名（英文）　On a dynamics of a solution for geometric evolution equations with a variational structure

研究代表者
高坂　良史（KOHSAKA YOSHIHITO）
室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：００３６０９６７

研究成果の概要（和文）：平均曲率流方程式に対して互いに交わる３つの超曲面の挙動の研究を行い、ガレルキン法や偏微分方程式系に対する解析方法、および摂動法などを組み合わせ、非局所項をもつ非線形放物型偏微分方程式の初期値・境界値問題(境界条件も非線形)に対する時間局所解の存在を明らかにした。また、表面拡散方程式による軸対象な曲面の挙動の研究を行い、定常曲面の線形安定性を得るために対応する固有値問題を導出し、その解析を行った。

研究成果の概要(英文):The motion of three hypersurfaces by mean curvature flow is studied. These hypersurfaces intersect each other. The existence of a local-in-time solution to an initial and boundary value problem for a system of nonlinear parabolic partial differential equations with non-local term is showed. Also, the motion of an axisymmetric surface by surface diffusion equation is studied. In order to obtain the linearized stability of a stationary surface, a corresponding eigenvalue problem is derived and analyzed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：非線形偏微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：表面拡散方程式、平均曲率一定曲面、Willmore 流方程式、平均曲率流方程式

１．研究開始当初の背景

（１）変分構造をもつ幾何学的発展方程式の1 つである表面拡散方程式の解の存在及び解の挙動に関しては、以下の研究結果があった。まず、相境界を平面内の曲線ととらえた場合は、閉曲線の場合に関して、円の近傍での時間大域解の存在と円の漸近安定性を示したElliott-Garcke(1997)の結果があった。また、相境界が外部領域と交わりをもつ場合に関して、定常解の線形安定性の判定条件を導いた Garcke-Ito-Kohsak(2005)の結果や線形安定な定常解の近傍での時間大域解の存在及びその定常解の非線形安定性を示した結果があった。一方、相境界が空間内の曲面の場

合は、コンパクトな閉曲面の場合に関して、球面の近傍での時間大域解の存在と球面の漸近安定性を示したEscher-Mayer-Simonett(1998)の結果があるが、相境界が外部領域と交わりをもつ場合に関しては研究途上であった。

（２）表面拡散方程式とは別の変分構造をもつ幾何学的発展方程式である Willmore 流方程式の解の存在及び解の挙動に関しては、以下の研究結果があった。まず、相境界が空間内のコンパクトな閉曲面の場合は、球面の近傍での時間大域解の存在と球面の漸近安定性を示した Simonett(2001)の結果があった。Simonett は表面拡散方程式に対する Escher-Mayer-Simonett の解析方法を Willmore流方程式に適用し、Escher-Mayer-Simonett と同様の結果を得た。また、Kuwert-Schatzle(2001、2002)はSimonettとは別の方法で Willmore 流方程式の時間大域解の存在と球面の漸近安定性を示し、さらに解の最大存在時刻の下からの評価を導出した。一方、動曲面が外部領域と交わりをもつ場合については、表面形状復元問題への Willmore 流方程式の応用を動機とした数値解析の結果がいくつかあるが、理論的な研究に関しては研究途上であった。

２．研究の目的

ある汎関数に対して、その汎関数の値が最も減る方向に関数の動きを導く方程式を勾配流方程式という。方程式が何らかの意味で勾配流方程式とみなせるとき、その方程式は変分構造をもつという。本研究では、変分構造をもつ幾何学的発展方程式として表面拡散方程式と Willmore 流方程式を研究対象とし、それらの方程式に対して可解性および解の挙動に関する研究を行う。具体的には、表面拡散方程式に対する定常曲面である平均曲率一定曲面や Willmore 流方程式の定常曲面である Willmore 曲面の安定性を解析し、それら定常曲面の近傍での動曲面の挙動を明らかにすることを目的とする。また、その挙動の過程で曲面に特異点が現れることが知られているが、その特異点の解析を行うことを目的とする。

３．研究の方法

（１）表面拡散流方程式は、曲面を距離関数や等高面などで表すことによって、4階の非線形放物型偏微分方程式として表されることが知られている。一般に4階の放物型偏微分方程式に対しては比較原理が成り立たない。したがって、平均曲率流方程式の解析で行われるような、優解・劣解を構成して解の評価を得るという手法は適用できない。よって本研究では、曲率に関する方程式に対してエネルギー法的手法を用いることによって、アプリオリ評価の導出及び非線形安定性の解析を行う。その解析にあたっては、境界条件から生じる非線形項の評価がポイントとなり、超曲面の面積汎関数の第2変分の解析がその評価において重要な役割を果たす。また、表面拡散流方程式の定常解は平均曲率一定曲面であるため、Koiso、Palmer、Ros、Souam、Vogel等による平均曲率一定曲面Capillary曲面の研究が、表面拡散方程式の定常解の安定性の解析と密接に関連しており、これら研究の解析方法が有効である。したがって、その解析方法を検討し、適用していく。

（２）表面拡散方程式に対する解析方法を、Willmore流方程式の解析に適用することを試みる。Willmore流方程式も、曲面を距離関数や等高面などで表すことによって、表面拡散方程式の場合と同様に4階の非線形放物型偏微分方程式として表される。よって、時間局所解の存在証明では、表面拡散方程式と同様の方法が適用可能であることが予想される。一方、アプリオリ評価の導出及び非線形安定性の解析にあたっては変分構造が重要な役割を果たしWillmore曲面の安定性の解析が欠かせない。したがって、境界をもつWillmore曲面の安定性の解析を進め、非線形安定性の研究に発展させていく。

４．研究成果

（１）4 階の幾何学的発展方程式による境界付き超曲面の解析を進めるにあたって、超曲面の解析方法をより詳細に検討するため、まずは2階の幾何学的発展方程式である平均曲率流方程式に対して互いに交わる3つの超曲面の挙動の研究を行い、研究成果を得た。具体的には、動曲面をある与えられた超曲面からの符号付距離関数で表し、得られた2階非線形偏微分方程式系に対して時間局所解の存在を明らかにした。この解析にあたっての難しさは、この問題が異なる超曲面上での偏微分方程式系になり、通常の理論が直接利用し難い点が挙げられる。さらに、導出された偏微分方程式系が空間に関して 2 次(主要部の微分の次数)の偏導関数を含む非局所項をもつため、通常の理論をそのままでは利用できない。本研究では、ガレルキン法や Solonnikov の偏微分方程式系に対する解析方法、および摂動法などを組み合わせ、これらの難点を解消し、時間局所解の存在を明らかにした。ここで得られた解析方法は、3 つの超曲面の表面拡散方程式による挙動の解析においても有効な手段となることが期待される。また、Willmore流方程式の境界値問題の解析にも有効な手段となるとことが期待され、ここで得た解析方法の Willmore 流方程式の初期値・境界値問題への適用は今後の研究課題である。

(２）表面拡散方程式によって動きが記述さ

れる曲面について、定常曲面の線形安定性に関する研究を行い、今後研究を進めていく上での基盤を築いた。具体的には、境界付きの超曲面が軸対象という設定のもとで研究を行い、この設定のもとで表面拡散方程式に対する定常曲面の線形安定性の判定基準の導出を試みた。対象が境界付きの超曲面であるため、解析に際して境界条件が必要となるが、境界条件としてはエネルギーを最小にするという観点から自然に導かれる角度条件と平均曲率の１次偏導関数に関する条件を課した。曲面が平行面の間にある場合に関してはVogel 等の研究結果があるため、境界面がより一般的な場合に関して研究を進め、その結果、境界の情報を含んだ線形化問題を得た。得られた線形化方程式は変数係数の4階常微分方程式であり、境界条件も変数係数の条件となる。この線形化問題に対応する固有値を解析することによって安定性の判定基準が得られるが、現在はある具体例に対する安定性の解析に止まっている。一般的な判定条件は得られていないが、その判定条件の導出は現象解析等に対して意義深いものであるので、今後のさらなる研究課題である。

（３）表面拡散方程式による3重結節点をもつ3曲線の有界領域における挙動に関して研究を行い、成果を得た。表面拡散方程式による曲線の動きはその曲線によって囲まれた部分の面積を保ちながら長さを最小にする方向に動くという変分構造をもつ。表面拡散方程式による3重結節点をもつ3曲線の挙動の解析は、Garcke-Ito-Kohsaka(2010)によって定常曲線の線形安定性の解析が行われている。そこでは定常曲線と有界領域の境界との交点における有界領域の境界の曲率をパラメータとして定常曲線の線形安定性の判定基準が導出されている。その判定基準の導出に際しては対応する固有値問題の解析が行われており、判定基準は最大固有値が0となるときの条件が相当する。この結果から、着目しているパラメータ(有界領域の境界の曲率)を判定基準となる集合(曲面をなす)の近傍で動かしたとき、動かし方に応じて定常解が何らかの分岐を起こすことが期待される。実際、曲線の長さを最小にする方向に曲線を動かすという変分構造をもつ曲率流方程式による挙動に関しては分岐が起こることが Nii(2009)によって示されている。そこで、Nii の解析方法とその結果を検討し、表面拡散方程式の場合に適応することを試みた。しかし、Nii による方法は円周角の定理を基にした図形的なものであり、表面拡散方程式の場合は図形的な構造が明らかでなくその方法は適応できなかったため、0-固有値に対応する固有関数の解析を Maple (ver. 15)を援用して行った。そこで、まずは曲率流方程式の場合に関して 0-固有値に対応する固有関数の解析を行い、Nii の結果を図形的にではなく解析的に明らかにした。その後、表面拡散方程式の場合に関して固有関数を導出し解析を行ったが、その固有関数が示す幾何構造が明らかではなく、今後の検討課題となっている。この研究によって固有関数が示す幾何構造が明らかになった場合、それは曲面の解析においても有力な情報となることが期待されるので、今後のさらなる研究課題である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① H. Garcke、 K. Ito、 Y. Kohsaka、Surface diffusion with triple junctions : A stability criterion for stationary Solutions、Advances in Differential Equations、査読あり、vol. 15、2010、pp. 437-472

② H. Garcke、K. Ito、 Y. Kohsaka、Stability analysis of phase boundary motion by surface diffusion with triple junction、Banach Center Publications、査読あり、vol. 87、2009、pp. 83-101

③ H. Garcke、 Y. Kohsaka、 D. Sevcovic、Nonlinear stability of stationary solutions for curvature flow with triple junction、Hokkaido Mathematical Journal、査読あり、vol. 38、2009、pp. 721-769

〔学会発表〕（計６件）

① 髙坂良史、Motion of interfaces by surface diffusion equation、研究集会「非線形現象の数値シミュレーションと解析 2012」、2012年3月9日、北海道大学

② 髙坂良史、Stability and instability of stationary interfaces for surface diffusion equation、弘前非線形方程式研究会、2011年12月22日、弘前大学

③ 髙坂良史、Stability analysis of steady states for surface diffusion equation in a bounded domain、学際的国際会議とチュートリアルセミナー「結晶成長の数学的側面」、2010年7月30日、北海道大学

④ 髙坂良史、On evolving hypersurfaces with boundaries by mean curvature flow、研究集会「変分問題の展開－幾何学的勾配流と臨界点理論の新潮流」、2010 年6 月7 日、京都大学数理解析研究所

⑤ 髙坂良史、Motion of phase boundaries by geometric evolution equations、Oberwolfach Workshop、2010 年2 月2 日、Oberwolfach(ドイツ)

⑥ 髙坂良史、 Phase boundary motion by surface diffusion with triple junction、SIAM Conference on Mathematical Aspects of Materials Science、2008 年 5 月 13 日、Philadelphia(アメリカ)

〔その他〕
ホームページ等
http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~kohsaka/main.html

６．研究組織
(1)研究代表者
髙坂 良史 (KOHSAKA YOSHIHITO)
室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：00360967

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：