

機関番号：11301

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008 ~ 2010

課題番号：20740087

研究課題名 (和文) 反応拡散系の解による時空間パターン形成の基本構造を探る

研究課題名 (英文) Mechanism of spatiotemporal patterns generated by reaction-diffusion systems

研究代表者

鈴木 香奈子 (SUZUKI KANAKO)

東北大学・国際高等研究教育機構・助教

研究者番号：10451519

研究成果の概要 (和文)：

パターン形成の数値モデルとして重要な役割を果たす反応拡散系について、それらに現れる様々なパラメータに着目し、解の挙動や形状がそれらにどのように依存しているかを明らかにすることに取り組んだ。活性因子—抑制因子型の反応拡散系については、基礎生産項が解のダイナミクスに与える影響を詳しく解析し、活性因子が空間パターン形成に失敗する現象(パターンの崩壊)のメカニズムを明らかにした。その他、凝集現象を記述する方程式の解の時間大域的挙動の解明、ある3元連立の反応拡散系について、解の挙動と空間パターンの存在と安定性解明を行った。

研究成果の概要 (英文)：

This study is concerned with the dynamics of reaction-diffusion systems modeling pattern formation in biological phenomena. I considered the role of parameters in reaction-diffusion systems on its dynamics. Concerning an activator-inhibitor system, the mechanism of “collapse of patterns” could be understood. I also considered one-dimensional chemotaxis equations to study the asymptotic behavior of solutions, and three component reaction-diffusion equations to show the existence and stability of spatial patterns.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象、反応拡散系、パターン形成

## 1. 研究開始当初の背景

数理生物学において、細胞や組織のパターン形成のメカニズムの解明は最も関心を集めてきた問題の一つである。20世紀半ばに、

チューリングが「異なる拡散率をもつ二種類の粒子が相互作用をしつつ拡散するとき、空間的非一様性が出現し得る」という反応誘導不安定化現象を発見して以来、自然界に見ら

れるパターンの自律的形成のメカニズムの中には、この原理で説明できるものが多いことがわかってきた。これ以降、多くの反応拡散系が提唱され、また今日では、特定の現象により合うように様々な改良版が提唱されている。例えば、1972年にA. Gierer と H. Meinhardt によって、ヒドラの頭部再生実験のモデルとして提唱された活性因子-抑制因子型の反応拡散系は、形態形成のモデルとして重要な役割を果たす。さらに今日では、貝殻の模様や熱帯魚の縞模様のモデルとしても用いられており、パターン形成の有力なモデルとしてその果たす役割は大きい。そして、未知関数を増やす、非線形項を飽和型にするなど、様々な改良版が考察されている。しかし、これらは個別の研究対象となっており、どのような構造の違いがあるかを比較するという視点からはあまり研究されていなかった。数学的観点からも、未知関数を分母に持つという特殊な非線形性による技術的な困難のため、そのダイナミクスに関する体系的な結果は、ある特別な定常解に関する結果を除けば、ほとんど得られていなかった。

## 2. 研究の目的

微分方程式は、現象の最も単純化された構造の一部であり、異なる現象でも同じような微分方程式で説明されることが多い。従って本研究では、パターン形成のモデルとして広く用いられているギーラー・マインハルト系を軸に、まずはこの系について深く理解する。具体的には、方程式系に現れる様々なパラメータが、解の挙動や定常解の形状にどのように依存するのかについて明らかにする。この知見を基に、並行して他の反応拡散系や方程式についても解の挙動や定常解の存在と安定性について考察し、現象を記述する微分方程式の基本構造について体系的に理解する。

本研究の結果、拡散反応系において、どのような反応がどのようなパターンを生み出すかを体系的に明らかにすることができ、これにより、実際に生物学的実験を行う方へも有効な情報を発信することができると期待している。

## 3. 研究の方法

本研究で主に扱うギーラー・マインハルト系は、二つの未知関数(活性因子  $u$  と抑制因子  $v$ )に関する半線形連立放物型偏微分方程式である：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{v^q} + \sigma_a(x), \\ \tau \frac{\partial v}{\partial t} = D \Delta v - v + \frac{u^r}{v^s} + \sigma_h(x). \end{cases}$$

ただし  $\tau > 0, \varepsilon > 0, D > 0$  は定数、指数  $p, q, r, s$  は  $0 < (p-1)/r < q/(s+1)$  を満たす非負の実数である。 $\sigma_a(x), \sigma_h(x)$  は基礎生産項と呼ばれる項で、非負値連続関数である。基礎生産項とは、単位時間当たりに領域から生産される化学物質の量を表す。本研究では、特に基礎生産項が解のダイナミクスやパターンの形状に与える影響を解明する。なぜなら、実際の現象のモデルとしては、 $\sigma_a(x) \geq 0, \sigma_h(x) \equiv 0$  として使用されることが多いが、これに生物学的な根拠は無い。従って、数理モデルの妥当性を検証するためにも、基礎生産項の役割を理解することは重要である。

本研究では、数値計算も重要な研究の一部とする。数値計算により解の挙動の予測を立て、仮定や解析手法を決める。特に注目するのは、 $\sigma_a(x) \equiv 0$  のときに数値実験で観測される現象「パターンの崩壊」である。これは、活性因子の空間パターンが一旦は現れるが、振動の後に最終的に  $u(x,t) \equiv 0$  となる現象である。この観測から、パターン形成のメカ

リズムを理解する指標として基礎生産項に着目する。パターン崩壊の解析では、常微分方程式系に対して得られている手法を参考に、パターン崩壊が起こりうるパラメータの範囲と初期値の評価を行う。パターン崩壊のメカニズムをはっきりさせるために、活性因子と抑制因子が満たす式のどちらにも基礎生産項が正で含まれる場合の解析も行う。このときは、解の下からの有界性がそれぞれ独立に得られることを使い、非線形項の上からの有界性を求め、安定な定常解の存在を考察する。安定性の考察では、線形化法による局所的な結果だけではなく、 $\sigma_a(x) \equiv 0$  の場合を参考に、パターン崩壊が起こりうる初期値の評価を行う。

ギーラー・マインハルト系の結果との比較において理解する反応拡散系として、走化性を示す生物の動きを表すモデルとしてよく知られた、一次元のケラー・シーゲル系と肺癌発現の数理モデルを考察する。一次元のケラー・シーゲル系の解析では、移流項をもつ方程式の解析手法を使用し、各段階で必要な解の評価を得るために、解を適当な関数で近似するなどの工夫を試みる。肺癌発現の数理モデルは、三つの未知関数から成る反応拡散系であり、そのうち一つの方程式のみが拡散項を含む偏微分方程式で、残りの二つは拡散項を含まず常微分方程式の形をしている。すべての方程式が拡散項を含む場合に使われる半群理論などが適用できない場合があり、解の存在や有界性という基本的な問題から理論の構築を行う。

#### 4. 研究成果

##### (1) ギーラー・マインハルト系に含まれる基礎生産項が解の挙動や定常解の形状に与える影響について

数値実験によって観測される、活性因子

が空間パターン形成に失敗する現象(パターンの崩壊)が、数値誤差による現象ではなく、実際に起こりうることを解析的に証明した。さらに詳しくパターンの崩壊のメカニズムを調べることにより、以下のことが分かった：①方程式系が活性因子の基礎生産項を含まない場合、活性因子の濃度が最終的に0になる現象が起こり得る、②抑制因子の基礎生産項が恒等的に0では無い場合、almost decoupled pattern と呼ぶ特別な定常解が存在する。③almost decoupled pattern は常に安定である。

almost decoupled pattern は、活性因子の濃度は正であるがほとんど一様に0に近い値をとる定常解である。従って、この定常解に初期値 - 境界値問題の解が収束する現象は、ある意味パターンの崩壊と呼ぶことができる。この定常解の存在は、方程式系に抑制因子の基礎生産項が正で含まれることにより生じるため、抑制因子の基礎生産項は方程式系の構造をより複雑にすることが分かった。基礎生産項が解のダイナミクスに及ぼす影響を考察した一連の結果から、パターン崩壊を防ぐには“活性因子の基礎生産項は非負かつ恒等的に0ではなく、抑制因子の基礎生産項は恒等的に0とする”ことが効果的であることが理論的に結論づけられた。さらに、より一般の活性因子-抑制因子系に対しても、パターン崩壊を証明することができるため、ある種に普遍の現象であることが分かった。

一方、基礎生産項が空間パターンの性質に与える影響について考察した結果、活性因子の基礎生産項の最大値が十分小さければ、活性因子の濃度が領域の境界上ただ一点で最大となる定常解の存在とその形状に与える影響はほとんど無いことが示された。

## (2) 他の方程式について

凝集現象を記述する方程式の解の時間大域的挙動について考察した。考察した式は、走化性を示す生物の動きを表すモデルとしてよく知られた、一次元のケラー・シーゲル系を含んでいる。解の動きを決める関数の性質に着目し、その性質によって解の収束先が異なることを示した。

肺癌発現の数理モデルについて、解の存在と有界性という基本的な問題と、さらに解の挙動、空間パターンの存在と安定性の解明に取り組んだ。この反応拡散系について、得られうるすべての滑らかな非定数定常解の存在を証明した。さらに、その空間パターンは常に不安定であることも示した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

1. Grzegorz Karch, Kanako Suzuki, Blow-up versus global existence of solutions to aggregation equations, *Appliciones Mathematicae*, 査読有, 2011年, 掲載決定
2. Kanako Suzuki, Izumi Takagi, On the role of basic production terms in an activator-inhibitor system modeling biological pattern formation, *Funkcialaj Ekvacio*, 査読有, 2011年, 掲載決定
3. Grzegorz Karch, Kanako Suzuki, Spikes and diffusion waves in a one-dimensional model of chemotaxis, *Nonlinearity*, 査読有, 23巻, 2010年, 3119-3137
4. Kanako Suzuki, Izumi Takagi, Collapse of patterns and effect of basic production terms in some reaction-diffusion systems, *GAKUTO international series "Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics"* *Mathematical Sciences and Applications*, 査読無, 32巻, 2010年, 163-187
5. Kanako Suzuki, Izumi Takagi, Behavior of solutions to an activator-inhibitor system with basic

production terms, *Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008*, COE Lect. Note, Kyushu Univ. Global COE Program, Fukuoka, 査読有, 14巻, 2009年, 49-59

[学会発表] (計18件)

1. Kanako Suzuki, Asymptotic behaviour of solutions to one-dimensional nonlocal transport equation, *International Winter School "Mathematical Analysis of Fluid Mechanics"*, 2011年2月8日, ポーランド
2. Kanako Suzuki, Existence and behavior of solutions to aggregation equations, *The 6<sup>th</sup> Jikji Workshop: Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability*, 2011年1月11日, 韓国
3. 鈴木香奈子, 凝集現象を記述する方程式の解の漸近挙動, 松山数学小研究会-Matsuyama Mini Workshop on Pure and Applied Mathematics-, 2010年12月5日, 愛媛大学
4. 鈴木香奈子, 一次元走化性モデルの解の時間大域的挙動, 仙台 楯円型・放物型微分方程式研究集会, 2010年12月3日, 東北大学
5. 鈴木香奈子, 発癌メカニズムを記述するある反応拡散系が見せる空間パターン, 数学の展開—諸分野との連携を探る, 2010年11月27日, 東北大学
6. Kanako Suzuki, Patterns of the shadow system with nontrivial basic production terms, *Concentration and Related Topics on Nonlinear Problems*, 2010年11月22日, 東北大学
7. Kanako Suzuki, Patterns in a reaction-diffusion model of early carcinogenesis, *Mini-Workshop on Modeling, Simulations and Analysis of Biological Pattern Formation*, 2010年10月30日, 宮城県仙台市
8. Kanako Suzuki, Steady-state patterns of the shadow system with nontrivial basic production terms, *Partial Differential Equations in Mathematical Biology*, 2010年9月13日, ポーランド
9. Kanako Suzuki, Spikes and diffusion waves in one-dimensional model of chemotaxis, *Nonlocal operators and*

partial differential equations, 2010  
年6月29日, ポーランド

10. 鈴木香奈子, ある活性因子 - 抑制因子系におけるパターンの崩壊現象, 第7回城崎新人セミナー, 2010年2月17日, 兵庫県
11. 鈴木香奈子, 基礎生産項を含むある活性因子 - 抑制因子系におけるパターンの崩壊, 京都駅前セミナー, 2010年1月22日, 京都府
12. 鈴木香奈子, 基礎生産項を含むギーラー・マインハルト系におけるパターンの崩壊, 数理解析セミナー, 2009年12月3日, 首都大学東京
13. 鈴木香奈子, ギーラー・マインハルト系の解と空間不均一なパラメータとの関係, 九州非線形数理集中・力学系合同セミナー, 2009年月20日, 九州大学
14. 鈴木香奈子, 空間非一様な基礎生産項を含むある反応拡散系の定常解について, 若手のための偏微分方程式と数学解析, 2009年2月20日, 九州大学
15. Kanako Suzuki, Collapse of spatial patterns in an activator-inhibitor system, The 3<sup>rd</sup> Cheongju Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2009年1月12日, 韓国
16. Kanako Suzuki, Collapse of patterns in some reaction-diffusion systems and how to prevent it, 非線形問題に現れる特異性の解析, 2008年12月2日, 京都府
17. 鈴木香奈子, ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス, 偏微分方程式と現象: PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008, 2008年11月14日, 宮崎大学
18. Kanako Suzuki, Behavior of solutions to an activator-inhibitor system with basic production terms, Czech-Japanese seminar in applied mathematics 2008, 2008年9月1日, 宮崎県

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

鈴木 香奈子 (SUZUKI KANAKO)  
東北大学・国際高等研究教育機構・助教  
研究者番号: 10451519

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: