様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月２６日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008～2010
課題番号：20740091
研究課題名（和文）　変分的手法による特異ハミルトン系の周期軌道存在問題

研究課題名（英文）　A variational study on the multiple existence of periodic orbits for some singular Hamiltonian system

研究代表者
足達　慎二（ADACHI SHINJI）
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：40339685

研究成果の概要（和文）：特異ハミルトン系の周期軌道の多重存在を示すためのポイントとなるモース指数の評価を詳細に行った。また，楕円型方程式の正値解の存在と一意性に関して研究を行い，方程式が空間変数に依存するある種の準線形楕円型方程式に対して峠の補題を用いて有限群作用不変な正値解の存在を示した。

研究成果の概要（英文）：I obtain precise estimate of the Morse index for some class of singular Hamiltonian system, which is a key point for the multiple existence of periodic orbits. I also show the existence of G-invariant positive solution of some quasilinear elliptic equations arising from plasma physics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：変分法，特異ハミルトン系，非衝突周期軌道，楕円型方程式，正値解

１．研究開始当初の背景

(1) 特異ハミルトン系について

特異ハミルトン系の非衝突周期軌道存在問題については，あらかじめ周期を指定する「周期指定問題」とあらかじめ運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和（エネルギー保存量）を指定する「エネルギー指定問題」がある。どちらの問題設定においても方程式系に対応する汎関数の臨界値の区別が難しく，非衝突周期軌道の存在については特に３次元以上の場合において多くの結果があるが，多重性については次元によらずこれまで成果はなかった。２次元における問題については，弱い特異性条件のもとでは非衝突周期軌道の存在すら完全には解決されていない。

(2) 楕円型方程式について

楕円型方程式については１９８０年ごろに提唱されたヘリウム膜の超流動状態を記述した準線形シュレディンガー方程式の定在

波解が満たすべき準線形楕円型方程式の解析を行った。この方程式は準線形性による複雑な変分構造を持つ故に，球対称性などの強い対称性を仮定したり，あるいは次元に制限を加えるなどしなければ数学的な解析はできなかった。２００４年にコリンとジャンジャンによって「双対アプローチ」と呼ばれる方法が確立され，より広いクラスに対して数学的な扱いが可能になった。

２．研究の目的

変分構造を持つ微分方程式やハミルトン系について，解の存在，多重性を通して方程式（系）の構造，性質を明らかにすることが研究目的である。非線形微分方程式に対するアプローチには様々なものがあるが，本研究では方程式に対応する汎関数に変分的手法を展開することにより，その解の存在や多重性等の研究を行う。数理物理等に現れる方程式は変分構造を持ち，その解は汎関数の臨界点として特徴付けられるので，この方法は非常に自然な方法である。特異ハミルトン系，および楕円型方程式についての個別の研究目的は以下である。

(1) ２次元における２体問題型特異ハミルトン系について

非衝突周期軌道の存在と多重性を示すことが目的である。特にある意味において弱い特異性条件のもとで，あらかじめエネルギー保存量を任意に与える「エネルギー指定問題」を考え，非衝突周期軌道の存在と多重性を示す。

(2) 準線形楕円型方程式について

方程式が空間変数に非一様に依存する場合を考え，弱い対称性のもとで正値解の存在を示すことが目的である。対称性と汎関数のコンパクト性の破れは密接な関係があり，これらの関係を詳細に調べることは変分法の発展の立場からも非常に重要である。

３．研究の方法

特異ハミルトン系と非線形楕円型方程式は一見全く様相が異なる問題のように思えるが，変分的アプローチをとると予想される問題点が同じものであったりする。例えば，どちらの問題も対応する汎関数においてパレ・スメール条件が成立しないとう顕著な性質が現れる。本研究においては以下のような方法で研究を行った。

(1) ２次元における特異ハミルトン系の非衝突周期軌道の存在と多重性について

① 弱い特異性条件のもとで議論するので，この困難を克服するためポテンシャルに強い特異性を持つものを付加した特異ハミルトン系を補助的に用いて議論を行う。修正された特異ハミルトン系に対応する汎関数に対してはパレ・スメール条件が成立するので，標準的な最小化問題を解くことにより周期軌道の存在を示すことができる。次に極限操作を行い本来の弱い特異性条件のもとでの非衝突周期軌道の存在を示す。極限操作の際に周期軌道が特異点と衝突を起こしていないことを示す必要があるが，これは衝突回数とモース指数の関係を詳しく調べることにより示すことができる。

② 多重性については汎関数の臨界値の違いだけでは本質的に異なる軌道であることを導くことができないので，周期軌道の形状を詳しく調べることによって軌道を区別し，多重性の証明を行う。まず周期軌道の特異点における渦巻数による特徴付けを行う。さらに各渦巻数を持つ軌道全体の集合を考え，その集合上で汎関数の最小化問題を考える。こうして，渦巻数による分類の数だけ，つまり，加算無限個の非衝突周期軌道の候補を得ることができる。次に極限操作を行うが，非衝突性の証明は存在証明の場合と同様に衝突回数とモース指数の関係に着目する。多重存在証明の場合は非衝突性に加えて，極限操作によって渦巻数が変わらないことを示す必要がある。ここでは周期軌道の自己交差数に注目し，渦巻数が変化すると仮定すると自己交差数も変わってしまい。これによってモース指数の評価に矛盾がでるので，極限操作によって渦巻数が変わることはないことを証明できる。渦巻数や自己交差数による周期軌道の分類など幾何学的側面からのアプローチも併用するところに特徴がある。

(2) 準線形楕円型方程式の正値解の存在について

２００４年に導入された「双対アプローチ」と呼ばれる方法を採用し，適当な変換により準線形楕円型方程式と同値な半線形楕円型方程式を導出し，この方程式の正値解を得ることによって，もともとの準線形楕円型方程式の正値解の存在を示すというアプローチをとる。この際，それぞれの方程式に対応する汎関数の関係を詳しく調べることが重要であり，さらに変換に用いる関数の解析も必要になる。また，特異ハミルトン系の場合と同様にこの問題においても対応する汎関数

に対してパレ・スメール条件が成立しない。ここでは方程式に有限群作用による不変性を仮定する。この仮定によりパレ・スメール条件が成立しない汎関数レベルを分類することができるので，峠の補題を用いて正値解の存在を示すことができる。この際，峠の補題による臨界値（の候補）のレベルにおいてパレ・スメール条件が成立することを示す必要があるが，これについては極限方程式のエネルギー最小解の相互作用を用いたエネルギー評価を用いて問題解決を図る。

(3) 研究体制，研究推進について

数学の研究においては文献参考が不可欠である。変分法の特異ハミルトン系や楕円型方程式への応用に関しては数多くの良著があるので，それらを購入し参考にする。また偏微分方程式論に関する研究集会にも積極的に参加し，リサーチフロントに立つ研究者との意見交換を行う。研究代表者が所属する静岡大学工学部では毎年「浜松偏微分方程式研究集会」を開催している。この研究集会は偏微分方程式における研究拠点として認知されているので，この研究集会も大いに利用して効果的に研究を推進する。特異ハミルトン系については共同研究者である早稲田大学の田中氏の支援を受ける。また，楕円型方程式については京都産業大学の渡辺氏と共同研究を行う。

４．研究成果

(1) ２次元特異ハミルトン系について

非衝突周期軌道の存在を示すためのポイントとなるモース指数を方程式系に対応する２種類の汎関数についてそれぞれ詳細に評価した。まず，モース指数を詳細に計算できるようなテスト関数を構成する必要があるが，３次元以上の場合とは異なり２次元ではテスト関数の構成が難しい。このことは周期軌道が平面運動をすることに起因する。ここでは，平面円軌道を考えることによりこの困難を乗り越えテスト関数を構成した。次に通常用いられる汎関数に対してモース指数の計算を行ったが，必要とされる精度の評価を得ることができなかった。そこで，汎関数を見直し，別の汎関数を導入することによってモース指数のより正確な評価を得た。汎関数の違いによってモース指数の評価に違いがでることは今後の指針を決める上で大変重要な事実であり，また，評価に用いた計算も学術上重要な意義がある。今後はこのモース指数の評価と周期軌道の渦巻数，自己交差数などの幾何的位相量の評価を用いて非衝突周期軌道の存在と多重性を示す。渦巻数や自己交差数などに対する取り扱い易さも２つの汎関数により違いが出てくると思われるので，どちらの汎関数がより適切なのかを慎重に見極めながら研究を進める。

(2) 準線形楕円型方程式について

方程式が空間変数に非一様に依存する非自励系の準線形楕円型方程式の有限群作用不変な正値解の存在を示した。先行結果は球対称性などの強い対称性を仮定して議論を行っていたが，この仮定を弱めることができた。また，これまでは準線形項の影響によって方程式から導かれるオルリッツ空間上で議論を行うことしかできなかったが，「双対アプローチ」を用いることにより自然なエネルギー空間で正値解を構成することができた。さらに自励系の準線形楕円型方程式に対して正値解の一意性と非退化性を示すことができた。この結果は準線形項のパラメータが大きい場合に一意性が成立していると捉えることができる。これは準線形性が正値解の一意性に強く影響を及ぼしている特徴的な結果である。また正値解の一意性の結果はシュレディンガー方程式の軌道安定性理論の確立に必要不可欠であり，その意味においても非常に重要な結果である。今後は準線形項のパラメータをゼロに近づけたときの正値解の漸近挙動について研究を進める。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

<u>足達慎二</u>，渡辺達也，G-invariant positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation，Advances in Differential Equations，Vol.16，2011，289—324，査読有

〔学会発表〕（計３件）

① <u>足達慎二</u>，Existence and uniqueness of ground states for a quasilinear Schrödinger equation，第４回非線形偏微分方程式と変分問題，２０１０年２月１４日，首都大学東京

② <u>足達慎二</u>，Existence of G-invariant standing waves of quasilinear Schrödinger equations，変分セミナー，２０１０年1月９日，早稲田大学

③ <u>足達慎二</u>，On the existence of G-invariant standing waves for a class of quasilinear Schrödinger equations，第３５回発展方程式研究会，２００９年１２月２３日，中央大学

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~tsadati/

６．研究組織

(1)研究代表者

足達 慎二（ADACHI SHINJI）
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：40339685