様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２０日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2008～2009
課題番号：20740096
研究課題名（和文）反応拡散方程式に関連する線形化固有値問題の解構造の解明及びその応用

研究課題名（英文）　Structure of linearized eigenvalue problems associated with reaction-diffusion equations and applications

研究代表者
若狭　徹（WAKASA Tohru）
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号：20454069

研究成果の概要（和文）：自然界に現れるパターン形成を記述する微分方程式の一つに反応拡散方程式と呼ばれるものがある．本研究課題では特に相転移現象に関わる双安定型反応拡散方程式に焦点を当て，時間とともに変化しない遷移層定常解の安定性に関わる線形化固有値問題の数理的解析を行った．特に，定常解形状と固有関数の形状についての関係を調べ，無限個ある固有関数のうち，多くの固有関数の形状に表現する漸近公式を証明した。

研究成果の概要（英文）：Some of pattern formation phenomena in nature are described by reaction-diffusion equations. In this research subject, the bistable reaction-diffusion equations describing phase transition is considered, and in particular, its linearized eigenvalue problems associated with stationary layer patterns are analyzed. The relationship between pattern of stationary solutions and those of eigenfunctions is of interest, and asymptotic formulas which provide patterns of most eigenfunctions are proved.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	**600,000**	**180,000**	**780,000**
２００９年度	**500,000**	**150,000**	**650,000**
年度			
年度			
年度			
総　計	**1,100,000**	**330,000**	**1,430,000**

研究分野：微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形現象，パターン形成，反応拡散方程式，定常解，固有値問題

１．研究開始当初の背景
(1) 相転移現象モデルの一つであるスカラー双安定型反応拡散方程式については 1970 年代より研究が盛んに行われている。この方程式においては遷移層と呼ばれるパターン形成が見られる。

(2) (遷移層パターンを持つ)定常解の安定性については，線形化固有値問題の固有値の符号が重要な役割を果たす。従来の研究により，特に空間１次元の場合についてはその性質が明らかとされていた。一方各固有値に対応するの固有関数の形状については、ある程度予想が立てられるものの，詳しくは知られていなかった。

(3) 固有関数の詳細な情報を知ることで，遷移層パターンの時間変化などの詳しい情報を得ることが期待される。このような数学的な関心に基づき，既に得られていた一部の固有関数の情報を手がかりに，固有関数の形状を解明することを研究課題の主な目的の一つに位置づけた。

２．研究の目的

本研究課題の対象となるのは，双安定型方程式を中心とする空間１次元の反応拡散方程式，特にその遷移層パターンを持つ定常解に関する線形化固有値問題である。申請当初の目的は，

① 双安定型非線形項の中でも特に具体的かつ重要な関数形に対して，導かれる線形化固有値問題の固有関数の形状や構造を解明すること。特に，微小拡散係数下における固有値・固有関数の漸近公式を導き，もとの定常解との関係を調べること。
② ①の情報を手がかりにより一般的な双安定型非線形項に対して，線形化固有値問題の固有値・固有関数の漸近公式を得ること。
③ 先行研究により，双安定型方程式の遷移層パターンはある縮約方程式によって支配されることが知られている。この情報と②の情報を下に，双安定型方程式のダイナミクスをより詳細に調べること。
④ (研究が順調に進行した場合)双安定型方程式を含む連立方程式系や非局所項を含む反応拡散方程式にこれまでに得られた情報やその解析手法を応用すること。

である。この中で，申請時において①に関する研究が既に進行している。

３．研究の方法

上記の研究目的に対応する数学的な定理を得ることによって目標が達成される。その研究手法は数理科学，中でも線形・非線形の微分方程式の解析手法，加えて研究①においては楕円積分や楕円関数などの特殊関数の解析手法が用いられる。得られた固有関数の公式などの可視化や複雑な計算の再検証において，Maple などの数式処理ソフトが使われる。

４．研究成果

(1) ある観点からは，本研究課題は特定のポテンシャル項が与えられた線型常微分方程式の理論研究と見なせる。研究着手当初の文献収集・調査を通して，シュレディンガー方程式や周期係数を持つ線型方程式の理論(Floquet 理論)，特に楕円関数をポテンシャルにもつラメ方程式の理論などと密接な関わりを持つことがわかってきた。

(2) これらのうちのいくつかは，現在も可積分系理論の一分野にて現在も発展している。こうした意味で得られた成果の一部は従来の研究による知見に含まれるが，境界値問題を解き固有関数を求めるという点でこれらとは異なっている。

(3) 特に本研究課題では微小拡散係数下における固有値・固有関数の漸近公式に関心がある。文献調査の結果，これに関しても先行する反応拡散方程式研究にて，既にいくつかの言及がなされていることがわかった(Nishiura-Fujii 1989，Fusco-Hale 1989)。しかし，本研究課題ではより精密な漸近公式を得ることができ，さらに固有関数全体を通して一定の普遍的構造が存在することを指摘している。

(4) 漸近公式は反応拡散方程式の定常解近傍のダイナミクスの様相を反映し，加えて従来の線形理論における固有関数の構造定理とは異なる視点を与える。さらに漸近公式は非常にシンプルでかつ普遍的な形をしており，高い実用性を備えているといえる。

以下各研究目的(２．研究の目的①～④)に関する成果について述べる。

① 2008 年度前半時点で，特定の双安定型非線形項(f(u)=sin u，f(u)=u-u^3)を与えた場合に全ての固有関数の表示式を楕円関数を用いて表し,さらに固有値を決定する超越方程式を導いた。解を直接表示する方法が成功した背景には Lame 方程式の理論がある。しかし超越方程式を解いて固有値を決定することは実際には容易ではなく，第３種楕円積分の高度な解析を要する。

　このとき固有関数の局所形状を規定する特別な固有関数が f(u)=sin u の場合には２つ，f(u)=u-u^3 の場合には３つ存在する。

　さらに任意の固有関数が特別な固有関数のうちの一つと漸近公式によって対応付けられ，これを介して全ての固有関数が特別な固有関数の個数によって分類される。このとき漸近公式は，任意の固有関数が(a)特別な固有関数， (b)周期性

の影響により現れるある三角関数の積によって近似されることを主張する。

② 2008 年度後半から 2009 年度にかけては①の方法の見直しを行い，一般の双安定型非線形項の場合に上記の漸近公式がどこまで普遍的に成立するかを調べた。
　まず(b)に関しては特別な固有関数などの例外を除くほとんどの固有関数について，Floquet 理論を通して必要な周期性の情報を抽出することが可能である。
　また(a)に関しては線形化方程式に対応する全区間上のスケーリング極限問題が特別な固有関数の個数を決定する。しかしその構造は極めてデリケートであり，反応拡散方程式の非線形項に依存する。
　結論として以下のことが示された。特別な固有関数の個数があらかじめわかっている状況を想定し，スケーリング極限に一定の仮定をおく。このときある程度「小さな」固有値(少なくとも安定性に関与する負の固有値は全て含まれる)に対応する固有関数については，①のタイプの漸近公式が必ず成立する。
　一方①では「大きな」固有値に対しても漸近公式が得られている。これは①において現れるポテンシャルが「代数幾何的」と呼ばれる特別なクラスとなると関係がある。一般の双安定型非線形項の場合に，ポテンシャルが代数幾何的となるかどうかは自明ではない。こうした事情により大きな固有値の漸近公式の証明は極めて難しい問題であり，引き続き調査を進めたい。

③ 固有関数の漸近公式の双安定型方程式への応用については，十分な検討を行うことができなかった。この問題については引き続き，明治大学・二宮広和准教授と連携しながら研究を継続したい。

④ 非局所項を含む反応拡散方程式への応用については研究を開始することができず，③と同様に今後の課題である。これに関しては，龍谷大学・四ツ谷晶二教授らと連携して研究を進めていきたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

(1) T.Wakasa and S.Yotsutani,
“Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems”, 査読あり
Communications in Pure and Applied Analysis 誌, Vol.9, 2010 年, pp.539-561.

(2) T.Wakasa,
“Representation and asymptotic formulasfor 1-dimensional linearized eigenvalue problems with Dirichlet boundary conditions”,査読あり
Nonlinear Analysis 誌, Series A: Theory, Methods and Applications, Vol.71 Special Issues WCNA2008, 2009 年, pp.e2696-e2704.

〔学会発表〕（計１０件）

(1) 若狭 徹,
「あるスカラー反応拡散方程式の線形化固有値問題の極限構造について」,非線形現象の数値シミュレーションと解析 2010, 2010 年 3 月 4 日, 北海道大学.

(2) Tohru Wakasa,
“On the limiting structure of linearized eigenvalue problems associated with 1-dimensional bistable reaction diffusion equations”(ポスター発表), JSPS-DFG conference in Evolution Equations, Related Topics and Applications, 2010 年 9 月 13 日, Helmholtz Zenturm, ドイツ連邦共和国ミュンヘン.

(3) Tohru Wakasa,
“Precise asymptotic results on some linearized eigenvalue problems associated with scalar reaction diffusion equations”, SNP2008
(Workshop on Singularities arising in Nonlinear Phenomena 2008), 2008 年 12 月 1 日, 関西セミナーハウス.

(4) 若狭 徹,
「ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の表現公式と漸近公式」,PPM2008
(Workshop on PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008), 2008 年 11 月 14 日, 宮崎大学工学部.

(5) 若狭 徹,
「ある線形化固有値問題の固有関数の漸近形状について」,日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学.

(6) Tohru Wakasa,
“On some linearized eigenvalue problems associated with Chafee-Infante equation: a classical approach from elliptic integrals”,
WCNA2008 (World Congress of Nonlinear Analysis 2008), 2008 年 7 月 7 日, 米国フロリダ州オーランド.

６．研究組織

(1)研究代表者

若狭　徹（WAKASA TOHRU）
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号：20454069