

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究 (B)
 研究期間：2008～2009
 課題番号：20740097
 研究課題名（和文） 時間遅れを持つ力学系の周期解の存在と安定性に関する研究
 研究課題名（英文） Study on the existence and stability of periodic solutions for delay dynamical systems
 研究代表者
 江上 親宏 (EGAMI CHIKAHIRO)
 沼津工業高等専門学校・電子制御工学科・助教
 研究者番号：90413781

研究成果の概要（和文）：本研究では、生物学に関する現象を記述する常微分方程式系・時間遅れを持つ微分方程式系に対して、周期解の存在と安定性、および時間遅れが解のダイナミクスに与える影響について研究した。本研究期間で得られた主な成果は次の 2 つである：(i) アリー効果と呼ばれる非線形性を持つ多種競争系に時間遅れを導入し、その解の安定性とパーマネンスについて解析した。(ii) ある HIV 力学系の分岐解析を通して、多変数モデルに汎用な Hopf 分岐定理の新しい証明方法を確立した。

研究成果の概要（英文）：This study examined the existence and stability of periodic solutions and also the effects of delays on the dynamics for systems of ordinary and delay differential equations which represent biological phenomena. The main results are classified into as follows: (i) For multi-species competitive systems with the nonlinearity called “Allee effect”, incorporating various types of delays into models, the stability and permanence of system were analyzed. (ii) A new method for proving the existence of a Hopf bifurcation was established through the bifurcation analysis of a HIV model. This is particularly beneficial for models which consist of multiple valuables.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
総 計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：数理生物学, Lotka-Volterra 型方程式系, HIV 力学系, Hopf 分岐, 写像度

1. 研究開始当初の背景

(1) 時間遅れの影響の解析：近年、状態の履

歴を考慮した微分方程式(関数微分方程式)の重要性が認識されており、生物学と経済学の

分野を中心に盛んな研究が行われている。時間遅れは分岐やカオスを引き起こし、解のダイナミクスに影響を与えるファクターであることが認知される一方で、その解析的な取扱いは常微分方程式と比較して格段に難しく、システムに対する一般的な解析手法は未だ確立されていない。

(2) Limit cycleの存在と安定性, Hopf分岐, パーマネンス: 力学系の周期解の存在と安定性に関する問題は、数学的・工学的な応用の幅が広く最も重要な研究課題のひとつである。特に自発的に内生的な振動を起こす非線形振動子系におけるLimit cycleの存在の証明は、Hopf分岐の存在の証明と同値である。

一方、生物モデルの時間発展に対する漸近挙動を議論する際の最も重要な指標として、パーマネンスという概念について精力的に研究されている。パーマネンスとは、生態系の構成要素となる全ての種が少々の環境的摂動に関わらず永続的に生存可能である事を指す。数理生物学上でのシステムの安定性の概念である。系のパーマネンスと周期解の存在性・安定性には極めて密接な関係があり、多くの場合、大域的漸近安定な性質を持つ正值平衡点または正值周期解が存在によって、系のパーマネンスが保証される。

(3) 写像度理論の応用と新手法の創出: 非線形解析の分野において、これまで写像度理論の果たしてきた役割は非常に大きい。上記(1), (2)で述べる問題解決の方法論として、問題を適当な関数空間上で定義される写像の不動点問題へ同値に書き換え、その存在証明に写像度理論を適用するのは一般的な手法と言える。力学系の解析に写像度を導入する場合、特に軌道有界な解を持つ系に対して強い威力を発揮する。

写像度は、Brouwer degreeとLeray-Schauder degreeの概念を基盤にして、これまでに数種類が構成されている。中でもGaines and Mawhin [LNM 568 (1977)]によって確立されたCoincidence degree theoryは、周期係数を持つ非自励系に対して、既知の周期を持つ周期解の存在問題に非常に有効であり、非常に多数の論文で応用されている。一方、自励系の時間遅れによって引き起こされる周期解の存在、すなわちHopf分岐の存在を調べる道具としては、Dylawski et al. [A

nn. Plon. Math., 62 (1991), pp.243-280.]によって開発された S^1 -degree theoryが現在最も成果を期待できる手法である。

2. 研究の目的

本研究では、主に生物学に関する現象を記述する常微分方程式系・時間遅れを持つ微分方程式系に対して、周期解の存在と安定性、および時間遅れが解のダイナミクスに与える影響について調べるために、写像度理論や分岐理論を組み合わせた新しい解析手法の開発を目的としている。特に多変数で構成されるモデルの解析に研究の焦点を当てる。

3. 研究の方法

前節で示す研究目的を実現するために、Lotka-Volterra型方程式系、HIV力学系、Belousov-Zhabotinsky(BZ)反応系、van der Pol型方程式系による非線形振動を具体的な研究対象とする。いずれの方程式系も近年の現象解析の分野において重要な位置を占める拡張性の高い非線形システムである。

本研究では、生物モデルに対しては正值周期解の存在と安定性やパーマネンスに、BZ反応系やvan der Pol型方程式系に対しては結合振動子系の引き込み現象に話題を絞って解析に取り組む。ここで全てに共通する問題として、多変数で構成されるシステムのHopf分岐に対して、如何に具体的な条件を与え存在定理を確立するかという点が挙げられる。従来、多変数系に適用できるHopf分岐定理はいくつか確立されてきているものの、これらの多くは一般的な議論である。換言すると、システムがある種の単調性を満たすような特別な場合を除いて、4変数以上のシステムに対するHopf分岐定理の具体的な適用例はほとんど与えられていない。その理由は明白で、局所安定性を解析するための固有多項式あるいはフルビッツ行列式の展開が複雑化し、厳密な計算を手で負うことが困難になるからである。そこで今回は、多変数システムに対するHopf分岐存在証明における汎用な計算手法の開発にも重点を置く。この結果が、研究の次段階である結合振動子系の引き込み現象解析に対して解決の糸口を与える。

4. 研究成果

(1) 時間遅れとアリー効果を持つ多種種競争系に対して、系のパーマネンスと正值平衡

解の大域的安定に関する定理を確立した[雑誌論文①]。アリー効果とは、種内競争に関する非線形性の1つを指す。従来のLotka-Volterra型の競争系においては種内競争率は個体群密度に単純比例する（すなわち生物種が単独の場合はロジステック成長に対応する）ことを仮定するのが一般的であるが、アリー効果では種内競争率が個体群密度に依存して、低密度時には共生、高密度時には競争へと連続的に変化することを仮定する。さらにアリー効果は、生物学的な観点から強い場合と弱い場合に分類されるが、当研究では弱アリー効果を持つ N 種の生物が競争するシステムに時間遅れを組み入れたモデルの解析に取り組んだ。

正值平衡解の存在定理は、弱アリー効果の非線形性を生かしたホモトピーを構成しBrouwer degreeを応用して証明した。また、任意の種間競争の時間遅れに対する系のパーマネンスと大域的漸近安定に関する命題を、ベクトル場の評価とLyapunovの方法により証明した。

図1は、弱アリー効果を持つ5種競争系に対して、命題で与えた条件の下で、(a)時間遅れを入れた場合と(b)適当な種間競争の時間遅れを入れた場合の数値計算例を示したものである。2つのグラフを比較すると、(b)の中程で時間遅れの影響による個体群密度の変動がはっきりと読み取れるが、(a),(b)いずれの場合でも終局的な各密度の値は一致することが分かる。

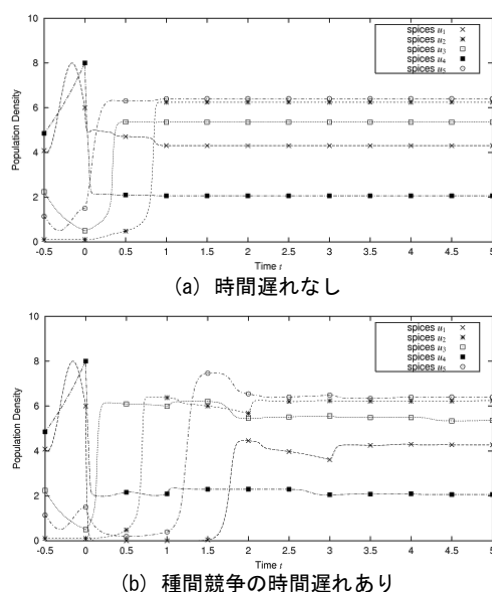


図1: 弱アリー効果を持つ5種競争系の個体群密度の時系列

(2) Nowak and Bangham [Science 272 (1996), pp74-79] は、HIVやHTLVのような致死的なウイルスに対するCTL応答モデルを構築した。彼らのモデルは5つの変数により構成される。Liu [TPB 52 (1997), pp.224-230]は、このNowak-Bangham(NB)モデルをウイルスの基本再生産数を用いて、平衡点の個数と局所安定性を分類した。また、ある特定のパラメータを変化させることにより、正の平衡点がHopf分岐を起こし非自明な周期解が現れることを数値的に発見した。

一方、基本再生産数はモデルの中の6つのパラメータによって与えられる。研究代表者は、Liuの与えた示唆を大幅に拡張し、基本再生産数自身がHopf分岐を起こす分岐パラメータになり得る（すなわち、基本再生産数を構成する6つのパラメータのうちどの1つを動かしてもHopf分岐が発生する）ことを発見し、この証明を完成した[雑誌論文②]。

図2に、基本再生産数を分岐パラメータとするNBモデルの分岐ダイアグラムを1つを示す。図は基本再生産数の増加にともなって、2回の平衡点の分岐を経てHopf分岐が発生する状況を表している。また、基本再生産数が6つのパラメータから構成されることから、同様のHopf分岐図は図2の他にも5つ描かれる。

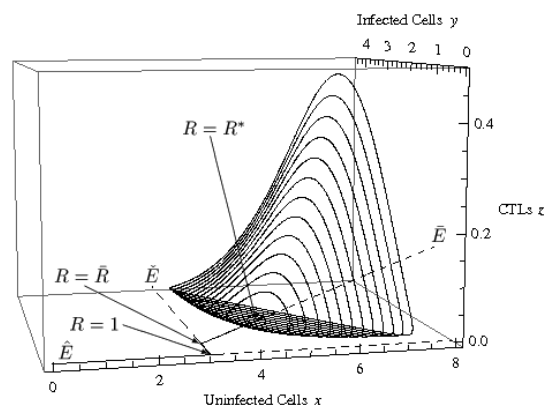


図2: NBモデルの分岐ダイアグラム

主定理の証明には、Liu [JMAA 182 (1994), pp.250-256]の方法を応用した。Liuは、Hopfの分岐定理とRouth-Hurwitzの安定判別法を融合した多変数のシステムに有効な分岐定理を開発したが、この定理を厳密にモデルに適用してHopf分岐の存在を証明した例はこれが最初の結果である。

Liuの方法をNBモデルに適用する上で、次の2点が技術的な鍵となる：①正の平衡点の

局所安定性を調べるためのヤコビアンは5次行列であり、その固有方程式を全て書き下すと係数の正負の判別などほとんど不可能など複雑なものになる。この問題を克服するために、適当な行列分割を用いて計算の効率化を図った、②Liuの与えたフルビッツ行列式の横断条件を直接的に保証することが困難であるため、4次のフルビッツ行列式によって与えられる4次関数のグラフの形状を調べ、その零点の代数的重複度が1になるための十分条件を導いて横断条件を確保した。

以上に示した証明手法は、従来のHIVモデルや伝染病モデルの解析において前例のないもので、NBモデル以外にも広く有効であり、基本再生産数を用いた生物モデルの分岐解析として画期的な結果であると言える。

(3) 周期的な係数を持つ非自励BZ反応系の引き込み現象の解析を進めている。これまでに係数が定数である場合の自励系に対するHopf分岐の存在と分岐の方向性(SupercriticalとSubcritical)に関する定理が得られた。また、Coincidence degree theoryを用いて非自励系に対する周期解存在定理を確立した。次段階として、解の安定性と写像度の値を関連付けるため位相縮約法による位相方程式を導出し、この解析に着手する。

(4) システムを表現する行列の対角成分に時間遅れを持つvan der Pol型結合振動子系のLimit cycleの存在問題に対して、 S^1 -degree theoryを用いたHopf分岐の解析を進めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Chikahiro Egami, Permanence of Delay Competitive Systems with Weak Allee Effects, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, in press, 査読有. DOI:10.1016/j.nonrwa.2010.03.001
- ② Chikahiro Egami, Bifurcation Analysis of the Nowak-Bangham Model in CTL Dynamics, Mathematical Biosciences, vol. 221 (2009), pp.33-42, 査読有. DOI:10.1016/j.mbs.2009.06.005

[学会発表] (計8件)

- ① Chikahiro Egami, A Sufficient Condi-

tion for the Existence of Hopf Bifurcation for An Immune Response Model, Equadiff12, Abstract p.77, Masaryk University, July 23, 2009.

- ② Chikahiro Egami, Positive Periodic Solutions of a Nonautonomous Delay Competitive System, 7th AIMS International Conference "Dynamical Systems, Differential Equations and Applications", Abstract p.239, University of Texas at Arlington, May 19, 2008.
- ③ 長澤祐也, 江上親宏, インフルエンザワクチンの効果的な配分方法の検討, 第15回高専シンポジウムinいわき, 講演要旨集p.238, いわき市文化センター, 平成22年1月23日.
- ④ 野本拓也, 江上親宏, Belousov-Zhabotinsky反応系の分岐解析, 第15回高専シンポジウムinいわき, 講演要旨集p.232, いわき市文化センター, 平成22年1月23日.
- ⑤ 長澤祐也, 江上親宏, インフルエンザワクチンの効果的な配分方法の検討, 富士山麓アカデミック&サイエンスフェア2009, 予稿集p.85, ふじさんめっせ, 平成21年12月16日.
- ⑥ 野本拓也, 江上親宏, Belousov-Zhabotinsky反応系の分岐解析, 富士山麓アカデミック&サイエンスフェア2009, 予稿集p.86, ふじさんめっせ, 平成21年12月16日.
- ⑦ 酒井佑慎, 江上親宏, HIV力学系における免疫応答モデルの分岐解析, 富士山麓アカデミック&サイエンスフェア2008, 予稿集p.56, アンジェ・ヴィラージュブケ東海, 平成20年12月11日.
- ⑧ 曾根悠太郎, 江上親宏, 腫瘍に対する免疫応答と治療の数理モデル, 富士山麓アカデミック&サイエンスフェア2008, 予稿集p.57, アンジェ・ヴィラージュブケ東海, 平成20年12月11日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

江上 親宏 (EGAMI CHIKAHIRO)
沼津工業高等専門学校・電子制御工学科・助教
研究者番号: 90413781

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし