様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月　９日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2008～2009
課題番号：２０７４０１４２
研究課題名（和文）　ゲージ・重力対応における可積分性の検証

研究課題名（英文）　Confirmation of integrability in gauge-gravity correspondence

研究代表者
　酒井　一博（SAKAI KAZUHIRO）
　慶應義塾大学・経済学部・助教
　研究者番号：１０４３９２４２

研究成果の概要（和文）：

ゲージ・重力対応は、素粒子の基本相互作用の記述に用いられるゲージ理論と、負の定曲率時空を背景に含む重力理論（弦理論）とが等価であるという主張である。この対応を利用し両理論を調べる上で、理論に見出される可積分性を活用する手法が近年急速に発展している。本研究では可積分性の威力がどこまで及ぶかを見極めるべく、グルーオン散乱振幅／古典開弦解に対する可積分性の活用法を探究した。特に AdS_3 部分空間における開弦解の構成について一般論を確立した。

研究成果の概要（英文）：

Gauge-gravity correspondence claims the equivalence between the gauge theory describing fundamental interactions of the elementary particles and the theory of gravity (string theory) in the background which includes a spacetime with negative constant curvature. Along the study of both theories with the help of this correspondence, there has recently been made rapid progress in making use of integrability emerged in the system. In the present research program we have investigated the application of the integrability to gluon scattering amplitudes/classical open string solutions, to examine to what extent one can make use of the power of integrability. In particular, we have established a general framework of constructing open string solutions in the AdS_3 subspace.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：物理学・素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理
キーワード：素粒子（理論）、数理物理学、弦理論、可積分系、AdS/CFT 対応

１．研究開始当初の背景

ゲージ・重力対応は、素粒子の基本相互作用の記述に用いられるゲージ理論と、負の定曲率時空を背景に含む重力理論（弦理論）とが等価であるという主張である。特に、4 次元 N=4 超対称ゲージ理論と AdS_5 x S^5 時空上の 10 次元超弦理論との等価性を主張する AdS/CFT 対応は、この 10 年弦理論の分野で最も盛んに研究されているテーマのひとつである。(AdS_5 は 5 次元の anti de Sitter 時空を表し、負の定曲率を持つ。S^5 は 5 次元の超球面。) AdS/CFT 対応の最大の特徴は強弱対応にあり、例えばゲージ理論の強結合極限が古典弦理論で記述できてしまう。このため既存の場の理論の手法では手の届かない強結合ゲージ理論の性質を調べる新たな手段として注目を集めている。
AdS/CFT 対応の研究は、2003 年頃から大きな進展を見せている。その呼び水となったのは可積分性の発見である。可積分性は N=4 ゲージ理論（および AdS_5 x S^5 時空上の超弦理論）の高い対称性の反映として見出されたもので、ゲージ理論の局所演算子の異常次元スペクトル問題（弦理論側での閉弦のエネルギースペクトル問題）が 1+1 次元の可積分模型として解ける事実が明らかになっている。
AdS/CFT 対応と可積分性を組み合わせた研究はゲージ理論の解明に向けた新たな突破口とり、例えば諸々の異常次元計算の基本となるカスプ異常次元の具体形がゲージ結合定数の関数として（つまり摂動の全次数で）決定されるなど、輝かしい成果が得られている。
上述の発展は理論のスペクトル問題に関するものであったが、N=4 ゲージ理論のグルーオン散乱振幅の計算にも AdS/CFT 対応や可積分性が利用できるのではないかとの期待が高まっている。少し前から、グルーオン散乱振幅の中でも Maximally Helicity Violating(MHV) 振幅と呼ばれるクラスに対して、高次の摂動計算が低次の摂動計算の組み合わせで表せるという反復的な構造が見出され、計算に利用されていた。その背景には双対共形対称性と呼ばれるダイナミカルな対称性の存在が示唆されている。また Bern -Dixon -Smirnov(BDS) は反復的構造の解析を押し進めて、MHV 振幅の全摂動和が摂動の 0 次と 1 次の結果だけを組み合わせて書き下せるのではないかという予想(BDS 予想)を提案した。これに対し、Alday -Maldacena は AdS/CFT 対応を用いることで、グルーオン散乱振幅の強結合極限を特定の境界条件を満たす古典開弦解の面積として計算するという方法を考案した。双対共形対称性および Alday -Maldacena の方法を利用することで、BDS 予想はグルーオンの 4 点、5 点振幅に対しては正しいこと、6 点以上の振幅については修正が必要なことが分かっている。しかしながら、一般の n 点振幅の具体的な表式は分かっておらず、解明が待たれている。

２．研究の目的

上述のようにグルーオン散乱振幅が通常の摂動論を経ずに計算できる事実は、可積分性がスペクトル問題にとどまらず、理論の様々なダイナミクスを統制していることを強く示唆している。しかしながら研究開始当初の時点では、グルーオン散乱振幅の計算における可積分性の利用は部分的なものにとどまっていた。そこで本研究では可積分性を最大限活用して N=4 ゲージ理論のグルーオン散乱振幅を一般的に求める方法の確立を目指した。これにより、可積分性がスペクトル問題のみならず、理論のダイナミクスを調べる上でも有用であることを実証することもあわせて目的とした。

３．研究の方法

背景の節で述べたように、グルーオン散乱振幅の強結合極限は弦理論側の古典開弦解の面積として与えられる。このとき開弦解の満たす運動方程式は古典可積分性を持つことが知られている。この可積分性を最大限に活用して解を構成することが本研究の基本戦略である。古典可積分性を利用して作られる中で最も一般性の高い解として、有限ギャップ解が知られている。Alday -Maldacena の方法においても、有限ギャップ解やこれを種にして作られるより一般的な解のクラスを調べることで、一般の n 点散乱振幅の具体形の構成に向けて前進できるはずである。
最も一般的なグルーオン散乱振幅に対応するのは 5 次元の anti de Sitter 時空における古典解である。本研究においてはこのうち 3 次元 anti de Sitter (AdS_3) 部分空間における解の構成に焦点を絞った。古典解のレベルにおいては、AdS_3 内の解は自動的に AdS_5 内の解にもなっており、また物理的に本質的なことの多くは AdS_3 内の範囲で調べるだけでも理解できると考えられる。
我々は以下のように三段階に分けて解の構成を計画した。
(1) 種数１の有限ギャップ解の構成
(2) 一般の有限ギャップ解の構成

(3) 有限ギャップ解を超える範囲での解の構成
研究体制については、筑波大学の佐藤勇二氏との共同研究の形で研究を遂行した。佐藤氏とは本研究開始以前から複数の論文を共著で出しており、当該研究に関する前提知識を広範囲にわたって共有している。また当該研究分野ではここ数年進展が著しいため、論文の形に発表された情報だけにとどまらず、同分野の研究者と緊密に連絡をとり常に最新の情報の収集に努めることが欠かせない。なかでも重要な機会として位置づけられるものに、2005 年から毎年夏に行われている国際会議が挙げられる。この会議は当該研究分野の専門家が年に一度一堂に会する機会となっている。本研究期間中にも 2009 年にドイツのポツダムで行われた会議に参加し、同分野の研究者と情報交換を行った。

４．研究成果

(1) 種数１の有限ギャップ解の構成
有限ギャップ解はスペクトル曲線と呼ばれる代数曲線を骨格として構成される。我々は研究の最初の段階として、有限ギャップ解の中でも最も基本的であるスペクトル曲線がトーラス（種数１）の場合に絞って解の構成を行った。種数１の有限ギャップ解は、よく知られた Jacobi のテータ関数を用いて解を完全に具体的な形で書き下すことができる。論文②において我々は、一般的な解の仮定から出発し、運動方程式、Virasoro 条件、実条件を全て満たす解をくまなく求め、系統的に分類した。その上でゲージ理論のグルーオン散乱振幅に対応する解を列挙した。ひとつの副産物として、複数のグルーオンの運動量の向きが揃う極限 (collinear limit)に対応する縮退解を初めて提示し、性質を詳しく調べた。

(2) 一般の有限ギャップ解の構成
続いて我々は、種数が一般の場合の有限ギャップ解の構成に取り組んだ。AdS_3 時空上の有限ギャップ解の構成に関しては、関連する先行研究として Krichever による dS_3 上の解の構成、Kazakov-Zarembo による AdS_3 x S^1 上のスペクトル曲線の構成などがある。しかしながらこれらの解は弦の世界面がミンコフスキー計量であるのに対し、グルーオン散乱振幅の計算に必要な解の世界面はユークリッド計量であるという大きな違いがある。このため前者と後者では満たすべき実条件が異なり、解の構成も全く独立に議論する必要がある。
論文①において我々は AdS_3 時空上のユークリッド計量の有限ギャップ解の完全な一般解を構成した。特に、これまで弦理論の文脈であまり触れられてこなかった実条件を明確な形で解き表した。さらに、こうして構成した解の中でどのような解がグルーオン散乱振幅に対応するかを明らかにした。特に、6 点以上の一般のグルーオン散乱振幅は有限ギャップ解には含まれず、別の解のクラスを形成していることを指摘した。
なお、AdS_3 時空内の一般的な有限ギャップ解を構成しておくことは、境界条件を取り替えることで Wilson ループの構成にも利用できるため、グルーオン散乱振幅の問題にとどまらず広く実用的意義がある。

(3) 有限ギャップ解を超えた範囲におけるグルーオン散乱振幅解の定式化
有限ギャップ解は、可積分性を利用し具体形を構成できる解としてもっとも一般的な解であるが、上で述べたように一般のグルーオン散乱振幅に対応する解は有限ギャップ解の範疇に入らず、別個に議論する必要がある。これらの解については、その具体形を書き表すことはできないものの、2009 年になって Alday-Maldacena, Alday-Gaiotto-Maldacena らの研究により、補助的線形問題において定義されるストークス係数の満たす積分方程式を用いて間接的に定式化出来ることが明らかになってきた。Alday-Maldacena は AdS_3 内の 8 点振幅、Alday-Gaiotto-Maldacena は AdS_5 内の 6 点振幅のみを扱っていた。我々は理化学研究所の初田泰之氏、東京工業大学の伊藤克司氏らと 4 人の共同研究において、彼らの議論を一般化し、AdS_3 内の一般の n 点グルーオン散乱振幅の強結合極限を計算する方法を提示した (講演①)。具体的には、一般の n 点振幅を規定する積分方程式の形を決定し、さらにこれが斉次 sine-Gordon 模型の熱力学的ベーテ方程式と同型であることを見出した。
なお我々のプレプリント発表と同時に、Alday-Maldacena-Sever-Vieira らが一般の AdS_5 上の場合に全く同様の積分方程式の形を発表しており、双方の結果の重複する部分は実際に一致することが後に確かめられた。これらの結果は AdS/CFT 対応における可積分性を用いてグルーオン散乱振幅を計算する上での基礎方程式に位置づけられるものであり、今後の研究にとっても極めて重要であると言える。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）
① <u>Kazuhiro Sakai</u> and Yuji Satoh, “Constant mean curvature surfaces in AdS_3,”Journal of High Energy Physics, 査読有,1003:077 (2010) 0-18.
② <u>Kazuhiro Sakai</u> and Yuji Satoh, “A note on string solutions in AdS_3,”Journal of High Energy Physics, 査読有, 0910:001 (2009) 0-18.
③ <u>酒井一博</u>, “可積分性と弦理論,”数理科学, 査読無, 557 (2009) 47-52.
④ <u>Kazuhiro Sakai</u> and Yuji Satoh, “Entanglement through conformal interfaces,”Journal of High Energy Physics, 査読有, 0812:001 (2008) 0-13.
⑤ <u>酒井一博</u>, “解説：ゲージ理論・弦理論対応と可積分模型,”査読無, 日本物理学会誌 63 巻 7 号 (2008) 524-531.

〔学会発表〕（計２件）
① <u>酒井一博</u>, “Thermodynamic Bethe ansatz equations for minimal surfaces in AdS_3,”国際研究会“Recent Advances in Gauge Theories and CFTs,”2010 年 3 月 1 日, 京都大学基礎物理学研究所.
② <u>酒井一博</u>, “AdS/CFT 対応における一般解の構成,”日本物理学会第 64 回年次大会, 2009 年 3 月 29 日, 立教大学.

６．研究組織
(1)研究代表者
酒井　一博（SAKAI KAZUHIRO）
慶應義塾大学・経済学部・助教
研究者番号：１０４３９２４２

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし