

平成 22 年 5 月 14 日現在

研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2008～2009
 課題番号：20760189
 研究課題名（和文） 超伝導応用機器の特性評価のための 3次元高速数値解析手法に関する研究
 研究課題名（英文） 3D numerical method for evaluation of superconducting applications

研究代表者
 植田 浩史（UEDA Hiroshi）
 早稲田大学・理工学術院・講師
 研究者番号：10367039

研究成果の概要（和文）：非線形渦電流場を含む有限要素法・境界要素法などの「場の解析」に基づく 3次元電磁界解析プログラムにおいて、境界積分方程式（境界要素法）の計算に高速多重極法を適用することによって、超伝導導体の電磁界解析プログラムの開発し、電磁的・熱的・機械的特性を統合した評価を行った。開発した電磁界解析プログラムは、（1）超伝導特性を考慮した 3次元電磁界解析（有限要素 - 境界要素併用法）が可能、（2）導体内の導電率が不均一なモデルでも偏流解析を行うことが可能、（3）高速多重極法を実装し、積分方程式を併用した高速化が可能である。この電磁界解析手法によって、超伝導導体の電流分布（電流偏流 / 電流転流）の把握、熱解析・応力解析との連成を行った。

研究成果の概要（英文）：We developed a computer program based on 3D hybrid finite element and boundary element method (FE-BE method) to clarify the electromagnetic behavior of HTS conductor. And, to reduce the execution time and to improve the accuracy of the numerical simulation based on the 3D hybrid FE-BE method, we modified the developed computer program by adopting the fast multipole method (FMM) to the part of the boundary element.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学 電力工学・電力変換・電気機器

キーワード：電気機器、高温超伝導、3次元電磁界解析、連成解析

1. 研究開始当初の背景

現在、高温超伝導材料の研究は Y 系超伝導材料を中心に行われている。Y 系超伝導線材は低温超伝導材料（金属系超伝導材料）に比べて極めて高い優位性を持つものであり、次

世代超伝導材料として、CO₂ 削減や省エネルギー効果が期待され、日米などを中心に熾烈な開発競争が展開されている。

高温超伝導線材を交流電力機器に応用する場合、超伝導線材の電流容量は十分ではな

く、超伝導線材を複数本束ねることにより集合導体化し電流量を増大させる必要がある。集合導体を構成するそれぞれの超伝導線材は、隣接線材が作る交流磁界下で交流電流が流れるため、集合導体を構成する超伝導線材内部の電流分布は相互に影響を及ぼすことになる。また、電磁界現象により超伝導体に電流が流れると、そこで発熱し、超伝導体の温度が上昇することになる。そして、温度が変化すると超伝導体の臨界電流特性等も変化し、電流の流れ方も変わる。このように、電磁界現象と熱現象、機械的応力など種々の現象に関する複合解析（連成解析）が、解析の高精度化には不可欠になる。従って、超伝導応用電力機器の電磁的・熱的・機械特性を定量的・統合的に解析・評価できるようにすることは極めて重要なこととなる。本研究はこのような Y 系超伝導線材における材料開発の進展と応用実現へ向けた研究開発の動向を踏まえ、「超伝導応用機器の特性評価のための 3 次元高速数値解析手法に関する研究」を行うものである。

2. 研究の目的

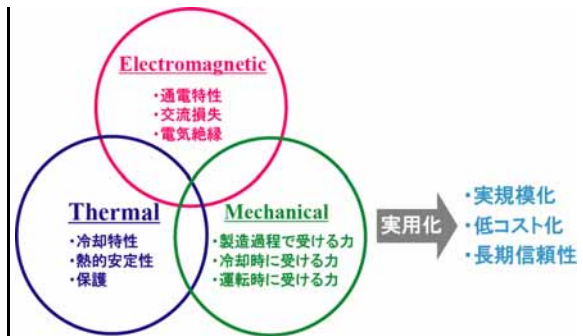
超伝導体を電力機器に応用するためには、電磁氣的・熱的・機械的特性を把握した上で、実規模化・低コスト化・長期信頼性の向上を図らなければならない。上記諸特性は互いに密接に関連しており、電力機器での最終利用形態である超伝導線材・導体による巻線（コイル）あるいはケーブルでは、その複合的な特性を正確に把握する必要がある。現在、それぞれの特性を評価するために異なった視点で開発された各種解析手法が存在している。本研究では、それらを統合することにより、数値解析手法の観点だけでなく、材料の有効利用も踏まえて、今後一層厳しくなると予想される超伝導電力応用機器の高性能化に対する要求に応え得る、より高度な機器設計支援技術の開発を目指す。具体的には有限要素 - 境界要素併用法を適用した **3 次元電磁界解析手法に高速多重極法を組み合わせた上で、最終的に超伝導応用電力機器の電磁的・熱的・機械的特性評価を統合的・定量的に精度良く行うための高速数値解析手法を確立**することを目的とする。

3. 研究の方法

本研究で開発する交流損失解析法は、「3 次元電磁界解析手法（有限要素法・境界要素法）」と「高速多重極法」を連成することで実現する。

< 3 次元高速電磁界解析手法の開発 >

有限要素 - 境界要素併用法に基づく 3 次元電磁界解析プログラムにおいて、境界積分方程式（境界要素法）の計算に高速多重極法を適用することによって、超伝導導体の電磁



界解析を行う。（1）電磁界解析の定式化：超伝導特性を考慮した 3 次元電磁界解析（有限要素 - 境界要素併用法）の定式を行う。

（2）回路解析との併用：集合導体を解析する場合、強制電流を与えて解く電流入力法では、集合導体の各線材に流れる電流値を予め求める必要があるが、導電率の非線形性を考慮した解析では導体断面内の導電率が不均一になるため各線材に流れる電流値を求めるのが難しく、偏流解析には適さない。そこで、導体内の導電率が不均一なモデルでも偏流解析を行うことが可能な、電圧入力法が必要になる。（3）高速多重極法の実装：高速多重極法を実装する上での大きな問題は、定式化、特に球面調和関数のシフトや多重極展開から局所展開への変換が複雑であり、プログラムの開発や高速化が難しいことである。高速多重極法を実装する手法としては多重極展開に関して、(a) 漸化式を用いる方法、(b) Anderson の方法、(c) Makino の方法（擬似粒子法）の三つが知られているが、本研究では、実装が容易な球面調和関数の漸化式を用いる方法を採用する。

これまでに開発した手法を超伝導機器に適用し、超伝導機器の電磁的・熱的機械的振舞を明らかにするための評価を行う。以上を通して、超伝導導体の電磁的・熱的・機械的特性を統合的に評価する大規模高速数値解析手法が有効な解析ツールとなるよう実用化に向けた課題抽出を行う。

4. 研究成果

(1)有限要素 - 境界要素併用法

工学分野における数値解析手法として、有限要素法（FEM）や境界要素法（BEM）が代表的なものとして挙げられる。有限要素法は、多媒質問題や不均質・非線形・異方性問題などに容易に適用可能であり、最も汎用性の高い数値解析手法として広く普及している。しかし、有限要素法は領域法であるため、解析領域が無限に広がっている場合には境界条件に何らかの策を講じる必要があり、解析対象に可動領域が含まれる場合にもその動きを記述するのは手間を要する。一方、境界要素法は、領域境界にのみ着目するため複雑な媒質特性の処理は不得手であるが、均一な無限領域や可動領域には容易に対処できる。電

磁界問題は、磁性体のような非線形領域と周囲に空気のような無限領域を有し、モータのような可動部を含む問題も多い。このような電磁界問題に対し、有限要素法の汎用性を備えたまま、境界要素法により無限領域の解析も自然にできる有限要素 - 境界要素併用法が検討されてきた。

以下に A - ϕ 法による有限要素法、 H 法による境界要素法の定式化および両者の結合方法について述べる。

(a) 3次元電磁界有限要素法の定式化

A - ϕ 法による支配方程式は、

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_0 - \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \phi \right) = 0 \quad (1b)$$

である。 μ は透磁率、 J_0 はコイル電流、 σ は導電率を表す。スカラー補間関数を N 、ベクトル補間関数を W として、Galerkin 法を用いると、

$$\begin{aligned} & \sum_j \left[\iiint_{V_e} \frac{1}{\mu} (\nabla \times W_i) \cdot (\nabla \times W_j) dV \right] A_j \\ & + \sum_j \left[\iiint_{V_e} \sigma W_i \cdot W_j dV \right] \frac{\partial A_j}{\partial t} \\ & + \sum_j \left[\iiint_{V_e} \sigma W_i \cdot \nabla N_j dV \right] \phi_j \\ & - \sum_j \left[\iint_{S_e} W_i \cdot (V_j \times n) dS \right] H_j \\ & = \iiint_{V_e} W_i \cdot J_0 dV \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_j \left[\iiint_{V_e} \sigma \nabla N_i \cdot W_j dV \right] \frac{\partial A_j}{\partial t} \\ & + \sum_j \left[\iiint_{V_e} \sigma \nabla N_i \cdot \nabla N_j dV \right] \phi_j = 0 \end{aligned} \quad (4b)$$

境界積分項は有限要素法の解析領域の境界についての積分である。これは次のいずれかの方法で処理する。

- 有限要素法の解析領域をできるだけ遠くまで広げて、その境界で $H=0$ を与える。その結果、境界積分項はゼロになり、有限要素法の未知数は A, ϕ となる。

- 有限要素法の解析領域外は境界要素法で処理し、境界を結合する。有限要素法の未知数は $A, \phi, H \times n$ となる。

(b) 3次元電磁界境界要素法の定式化

境界要素法では磁界の強さ H を変数として、次の積分方程式を用いる。

$$\begin{aligned} C_p H_p &= \iint_S (H_Q \times n) \times \nabla_Q \frac{1}{r} dS \\ &- \iint_S (H_Q \cdot n) \nabla_Q \frac{1}{r} dS \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 P, Q はそれぞれフィールド点、ソース点で、 H_P, H_Q はそれぞれ点 P, Q における磁界の強さを表す。また、 r は点 P, Q 間の距離、 C_p は点 P から考察領域を見込む立体角である。

境界要素法の未知数は $(H \times n)$ と $(H \cdot n)$ となる。

ここでは有限要素法との結合のため、磁界の法線成分 $(H_Q \cdot n)$ を A で表現すると、

$$\begin{aligned} C_p H_p &= \iint_S (H_Q \times n) \times \nabla_Q \frac{1}{r} dS \\ &- \iint_S \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \cdot (A_Q \times n) \} \nabla_Q \frac{1}{r} dS \end{aligned} \quad (6)$$

のようになる。辺 l_i で線積分すれば、

$$\begin{aligned} C_i H_i &= \sum_j \iint_S \left[\left\{ (V_j \times n) \times \nabla \frac{1}{r} \right\} \cdot l_i dS \right] H_j \\ &- \sum_j \left[\iint_S \frac{1}{\mu_0} \{ (\nabla \times V_j) \cdot n \} \left(\nabla \frac{1}{r} \cdot l_i \right) dS \right] A_j \end{aligned} \quad (8)$$

これで境界要素法の未知数は $H \times n$ と A になった。

(c) 有限要素法と境界要素法の結合

有限要素法と境界要素法とを結合する際、境界の境界条件を満たす必要がある。すなわち、

$$(B_2 - B_1) \cdot n = 0 \quad (9a)$$

$$(H_2 - H_1) \cdot t = J_s \cdot (n \times t) \quad (9b)$$

ここで、 n, t はそれぞれ境界面の法線方向単位ベクトル、接線方向単位ベクトルで、 J_s は境界面に存在する表面電流である。式(15a)は B の法線成分の連続性、式(15b)は H の接線成分の連続性を表す。解析では、FEM, BEM とも辺要素を用いることから、 H の接線成分の連続性は変数 H を FEM, BEM で共有することで自動的に満足される。一方、 B の法線成分の連続性はベクトルポテンシャル A の連続性と等価であり、FEM, BEM で変数 A を共有することで自動的に満足される。以上のように辺要素を用いると、境界の境界条件が自動的に満足するように FEM, BEM の離散化をすることが可能である。

また、BEM のベクトル変数の近似法として、接線成分は 1 次近似、法線成分は 0 次近似とする 0-1 次混合離散化方式を採用する。この辺要素 0-1 次混合離散方式を用いた場合、要素内の未知変数の変換過程を経て、FEM 領域と BEM 領域を容易に自然に結合することができる。

結局、有限要素法と境界要素法を結合することで、最終的に以下の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K+C & D & L \\ C' & D' & 0 \\ G & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

このようにしてできる係数 Matrix は非対称になる。

(2) 高速多重極アルゴリズム

境界要素法は、問題の次元を一次元下げら

れるという長所を有し、電界などの微量量の計算精度が高いこと、無限領域の取扱いが容易なことなど、の特徴と有している。しかし、境界要素法は密行列を扱う必要があり、疎行列を扱う有限要素法に対して、特に大規模問題への適用において大幅に不利であると考えられていた。つまり、未知数も個数を N とすると、境界要素法では少なくとも $O(N^2)$ の演算および記憶容量が必要で、例えば、メモリが GB 程度の PC ならば、 N として数千からせいぜい 1 万程度が限界であった。ところが、連立方程式の解法に反復法を採用して、係数行列の記憶を不要とし、さらに反復解法に必要な係数行列・ベクトル積の計算に、高速多重極法 (FMM) と呼ばれる手法を適用して $O(N)$ に削減することが提案され、PC でも N として数 10 万から数 100 万程度が扱えるようになった。ここでは、FMM には必須となる多重極展開および局所展開の数学的表現、FMM の実装について述べる。

(a) Laplace 方程式の解

静電界 (静磁界) では、Gauss の法則より空間に電荷 (磁荷) が存在しない場合、ポテンシャル Φ は、次の Laplace 方程式を満たす。

$$\nabla^2 \Phi(r) = 0 \quad (11)$$

この方程式の解 (一般解) を球面調和関数展開で表現すると以下ようになる。

$$\Phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(L_n^m r^n + \frac{M_n^m}{r^{n+1}} \right) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (12)$$

この $Y_n^m(\theta, \phi)$ を球面調和関数 (spherical harmonics) という。ここで、 $r^{-(n+1)} Y_n^m(\theta, \phi)$ を多重極解、 $r^n Y_n^m(\theta, \phi)$ を多項式解 (局所解) という。また、それぞれの係数 M_n^m 、 L_n^m を多重極展開係数、局所展開係数といい、それぞれの級数を多重極展開 (multipole expansion)、局所展開 (local expansion) と呼ぶ。

(b) 多重極展開、局所展開の意味

多重極展開では、多重極展開係数が既知であれば、展開半径の外部から観測する場合、展開半径内部の点電荷の寄与を個別に直接計算する結果と、多重極展開係数を用いて計算する結果は同じになる。一方、局所展開では、局所展開係数が既知であれば、展開半径の内部から観測する場合、展開半径の外部の点電荷の寄与を個別に計算する結果と、局所展開係数を用いて計算する結果は同じになる。以上の事実が高速多重極法では重要な役割を果たすことになる。

(c) 漸化式を使った多重極展開表現

高速多重極法の展開係数は、その数学的表現が非常に複雑であるため、実際にプログラムを書くには、不便である。そこで、より容易な表現が必要になる。ここでは、漸化式を使った表現を採用した。

$1/|r - \rho|$ を球面調和関数展開すると、

$$\frac{1}{|r - \rho|} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \rho^n Y_n^{-m}(\alpha, \beta) \frac{Y_n^m(\theta, \phi)}{r^{n+1}} & (r > \rho) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{Y_n^{-m}(\alpha, \beta)}{\rho^{n+1}} r^n Y_n^m(\theta, \phi) & (r < \rho) \end{cases} \quad (13)$$

である。これを变形すると、以下の式が得られる。

$$\frac{1}{|r - \rho|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{n,m}(\vec{Oy}) \overline{S_{n,m}(\vec{Ox})} \quad (14a)$$

$$R_{n,m}(\vec{Oy}) = \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) e^{im\beta} \rho^n \quad (14b)$$

$$S_{n,m}(\vec{Ox}) = (n-m)! P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (14c)$$

ここで、 $R_{n,m}$ 、 $S_{n,m}$ は体球調和関数 (solid harmonics) と呼ばれる。

この結果を使えば、 N 個の点電荷群 $q_i \sim q_N$ が点 r につくるポテンシャルは多重極展開 (展開中心 O) では、

$$\Phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}(\vec{Or})} M_{n,m}(O) \quad (15)$$

より、多重極展開係数 $M_{n,m}(O)$ は、

$$M_{n,m}(O) = \sum_{i=1}^N q_i R_{n,m}(\vec{Or}_i) \quad (16)$$

となる。また、局所展開は、

$$\Phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{n,m}(\vec{Or}) L_{n,m}(O) \quad (17)$$

より、局所展開係数 $L_{n,m}(O)$ は、

$$L_{n,m}(O) = \sum_{i=1}^N q_i \overline{S_{n,m}(\vec{Or}_i)} \quad (18)$$

となる。

(d) 多重極展開の移動 (M2M)

展開中心を O から O_0 に移したときの多重極展開係数を求める。展開中心 O_0 の多重極展開係数は、

$$\begin{aligned} M_{n,m}(O') &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} R_{n',m'}(\vec{O'O}) M_{n-n',m-m'}(O) \\ &+ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} (-1)^{m'-m} R_{n',m'}(\vec{O'O}) \overline{M_{n-n',m-m'}(O)} \\ &+ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{n'} (-1)^{m'} \overline{R_{n',m'}(\vec{O'O})} M_{n-n',m+m'}(O) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

(e) 多重極展開を局所展開に変換 (M2L)

展開中心 O の多重極展開係数を展開中心 r_0

の局所展開係数に変換する関係式は、

$$\begin{aligned}
L_{n,m}(r_0) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} (-1)^n \overrightarrow{S_{n+n',m+m'}}(\overrightarrow{Or_0}) \overline{M_{n',m'}}(O) \\
&+ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{\substack{m'=1 \\ m \geq m'}}^{n'} (-1)^{n+m'} \overrightarrow{S_{n+n',m-m'}}(\overrightarrow{Or_0}) \overline{M_{n',m'}}(O) \\
&+ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{\substack{m'=1 \\ m < m'}}^{n'} (-1)^{n-m} \overrightarrow{S_{n+n',m'-m}}(\overrightarrow{Or_0}) \overline{M_{n',m'}}(O)
\end{aligned} \quad (20)$$

となる。

(f) 局所展開の移動 (L2L)

展開中心を r_0 から r_1 に移したときの局所展開係数の変換関係は、

$$\begin{aligned}
L_{n,m}(r_1) &= \sum_{n'=n}^{\infty} \sum_{\substack{m'=0 \\ m \geq m'}}^{n'} R_{n'-n,m'-m}(\overrightarrow{r_0 r_1}) \overline{L_{n',m'}}(r_0) \\
&+ \sum_{n'=n}^{\infty} \sum_{\substack{m'=1 \\ m < m'}}^{n'} (-1)^{m-m'} \overrightarrow{R_{n'-n,m'-m}}(\overrightarrow{r_0 r_1}) \overline{L_{n',m'}}(r_0) \\
&+ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{n'} (-1)^m \overrightarrow{R_{n'-n,m'+m}}(\overrightarrow{r_0 r_1}) \overline{L_{n',m'}}(r_0)
\end{aligned} \quad (21)$$

となる。

(g) 階層構造の作成 - 八分木 (octree)

高速多重極法は考察領域を分割して階層構造を作らなければならない。ここでは八分木 (octree) を採用する。

1. 解析領域全体 (全ソース) を内包する立方体を考え、これを根 (ルートセル) と呼ぶ。これをレベル 0 のセルとする。
2. ルートセルを 8 等分して、レベル 1 のセルを作成する。以下同様に、レベル i のセル (親セル) を 8 等分して、レベル $i+1$ のセル (子セル) を作成し、設定した最下層までセル分割を繰り返す。セル分割の際には、ソースを含まないものはそれ以上の分割をやめ、セルの含むソース数があらかじめ決めた数よりも多い場合はそのセルを分割する。セル構造の最下層を葉 (リーフセル) と呼ぶ。

(h) FMM のアルゴリズム

FMM のアルゴリズムは「upward process」と「downward process」から成る。八分木のセル構造に基づいて、以下の計算を実行する。なお、FMM ではセルの遠近をセルの離隔数で判定する。

1. upward process

- (a) 葉セルが含む全てのソースが作る場をセル中心に関する多重極展開を用いて表現する (MP, 図 1(a)参照)。
- (b) レベルを一つずつ減少させながら、子セルで定義された多重極展開を親セルの中心に移動して加える (M2M, 図 1(b)参照)。

これをルートセルまで繰り返す。以上で、すべてのセルに多重極展開が定義される。

2. downward process

- (a) 親セルに局所展開がある場合は、その局所展開の中心を自分のセルの中心に移動して、自分の局所展開に加え合わせる (L2L, 図 1(d)参照)。
- (b) 親セルの近傍に含まれる自分のセルと同レベルのセルのうち、自分から遠方にあるセルを選び、そのセルの多重極展開を自分のセルの局所展開に変換して、加え合わせる (M2L, 図 1(c)参照)。以上で、全ての遠方セルからの影響を各セルの局所展開として表現できる。
- (c) 葉セルにおいて、局所展開の寄与 (LC) と近傍セルに含まれるソースの影響を直接加え合わせて、任意の点でのポテンシャルを求める (図 1(e)参照)。

プログラムを作る際には、「再帰呼び出し」(関数 F がその中で自分と同じ関数 F を呼び出すこと) を利用する。

(3) 3次元電磁場境界要素法への高速多重極法の適用

(a) 電磁場解析

境界要素法では磁界の強さ H を変数として、ヘルムホルツの定理より次の積分方程式が導かれる。

$$C_p H_p = \int_S (\mathbf{H}_Q \times \mathbf{n}) \times \nabla_Q \frac{1}{r} dS - \int_S (\mathbf{H}_Q \cdot \mathbf{n}) \nabla_Q \frac{1}{r} dS \quad (22)$$

$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ をベクトルポテンシャル A を使うと、

$$\begin{aligned}
C_p H_p &= \int_S (\mathbf{H}_Q \times \mathbf{n}) \times \nabla_Q \frac{1}{r} dS \\
&- \int_S \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \cdot (\mathbf{A}_Q \times \mathbf{n}) \} \nabla_Q \frac{1}{r} dS
\end{aligned} \quad (23)$$

辺要素を用いているため、ベクトル補間関数を含んだ形で多重極展開を表現する。境界要素法の定式で現われた右辺第 1 項、第 2 項の $\nabla(1/r)$ を cell の中心 O の多重極展開で表現すると、それぞれ、

$$\int_S (\mathbf{H}_Q \times \mathbf{n}) \times \nabla_Q \frac{1}{r} dS = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overrightarrow{S_{n,m}}(\overrightarrow{Or_p}) \mathbf{M}^B_{n,m}(O) \quad (24a)$$

$$\begin{aligned}
&\int_S \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \cdot (\mathbf{A}_Q \times \mathbf{n}) \} \nabla_Q \frac{1}{r} dS \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overrightarrow{S_{n,m}}(\overrightarrow{Or_p}) \mathbf{M}^G_{n,m}(O)
\end{aligned} \quad (24b)$$

となる。ここで、 $\mathbf{M}^B_{n,m}$ 、 $\mathbf{M}^G_{n,m}$ は多重極展開係数で次のようになる。

$$M_{n,m}^B(O) = \sum_{k \in \text{leaf}} \sum_i \left\{ \int_{S_k} (\mathbf{W}_i \times \mathbf{n}) \times \nabla R_{n,m}(\overrightarrow{Or_Q}) dS_k \right\} H_i \quad (25a)$$

$$M_{n,m}^G(O) = \sum_{k \in \text{leaf}} \sum_i \left\{ \int_{S_k} \frac{1}{\mu_0} \{ (\nabla \times \mathbf{W}_i) \cdot \mathbf{n} \} \nabla R_{n,m}(\overrightarrow{Or_Q}) dS_k \right\} A_i \quad (25b)$$

ここで、 k は境界要素、 i はその要素を構成する辺を表す。 k leaf は leaf cell に含まれる境界要素 k についてのみ和をとることを表す。 $\nabla R_{n,m}$ は以下の関係から求める

$$\frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} = \frac{1}{2} (R_{n-1,m-1} - R_{n-1,m+1}) \quad (26a)$$

$$\frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} = \frac{i}{2} (R_{n-1,m-1} + R_{n-1,m+1}) \quad (26b)$$

$$\frac{\partial R_{n,m}}{\partial z} = R_{n-1,m} \quad (26c)$$

以上から、 $M_{n,m}(O) = M_{n,m}^B(O) + M_{n,m}^G(O)$ とおけば、

$$\mathbf{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overrightarrow{S_{n,m}(\overrightarrow{Or_p})} M_{n,m}(O) \quad (27)$$

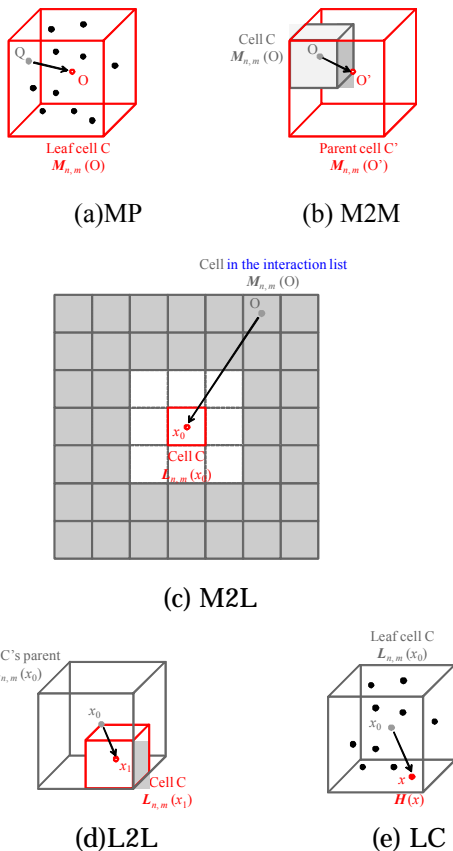


図1 高速多重極法の係数変換の概念図

が得られる。M2M, M2L, L2L, LC は x, y, z の三成分について行えばよい。

(4) 解析例

以上の開発した3次元電磁場解析手法を用いて超伝導導体の電流分布を計算した。

想定した超伝導導体は、5mm幅のYBCO超伝導線材(Hastelloy基板厚さ100mm、YBCO厚さ1mm、銀層厚さ10mm、銅厚さ50mm)を12枚、径21.5mmでスパイラルピッチ300mmで巻かれたものである。図2が対象とした超伝導導体の要素分割例である。この時、要素数は約18000、節点数は約27000、未知数は約130000で計算時間は1ステップ20分程度である。従来手法ではこの規模の計算は1ステップ6時間を要する場合もある。図3に計算した電流分布の例を示す。

この他、コイルにした場合でも、本手法が有効であることを確認した。

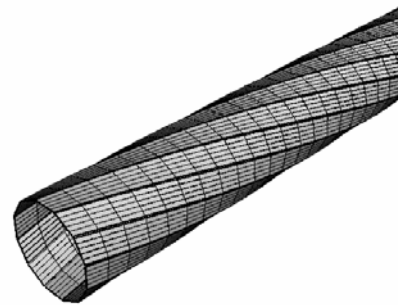


図2 超伝導導体の要素分割例



図3 超伝導導体の電流分布例

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計0件)

[学会発表](計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

植田 浩史 (UEDA Hiroshi)

早稲田大学・理工学術院・講師

研究者番号: 10367039