

平成 22 年 5 月 25 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）
 研究期間：2008～2009
 課題番号：20840004
 研究課題名（和文） Bergman空間上の荷重合成作用素のコンパクト性と本質ノルムの研究
 研究課題名（英文） On the essential norm and the compactness of the weighted composition operator on Bergman spaces
 研究代表者
 植木 誠一郎（UEKI SEIICHIRO）
 茨城大学・工学部・講師
 研究者番号：70512408

研究成果の概要（和文）：正則関数からなるベルグマン空間上の荷重合成作用素の本質ノルムに対する評価不等式とコンパクト性に対する特徴付けについての研究を行った。2008年度の研究では、ベルグマン空間およびハーディ空間上の荷重合成作用素の本質ノルムを評価し、そのコンパクト性を特徴付けた。2009年度は、ベルグマン空間上の合成作用素の本質ノルムを境界における ϕ の角微係数に関する情報で評価した。ベルグマン空間からハーディ空間へと作用する荷重合成作用素の本質ノルムを評価した。

研究成果の概要（英文）：In this research, we considered the Bergman space which consists of holomorphic functions on the unit ball and the weighted composition operator on these spaces. Our purposes are to estimate the essential norm for this type of operator and to characterize the compactness of it. In 2008 we had estimated the essential norm of the weighted composition operator on the Bergman space or the Hardy space. In 2009 we had estimate the essential norm of the composition operator on the Bergman space in terms of the condition on the angular derivative of ϕ at the boundary point. Also we characterized the compactness of the weighted composition operator from the Bergman space into the Hardy space and estimated the essential norm of it.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,140,000	342,000	1,482,000
2009年度	1,040,000	312,000	1,352,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,180,000	654,000	2,834,000

研究分野：解析関数空間論、函数論、函数解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Bergman空間、Hardy空間、Fock空間、荷重合成作用素、コンパクト作用素、本質ノルム、Berezin変換、Carleson測度

1. 研究開始当初の背景

この研究では、主に解析関数からなる関数空間である Bergman (ベルグマン) 空間を

取り上げ、その上の荷重合成作用素の本質ノルム評価を与えることを目標とする。

本質ノルム評価を与える意義は、作用素

の基本性質であるコンパクト性を特徴付ける有用な道具となり得ることである。

これまでに申請者を含め、世界中の研究者達によりこのタイプの作用素のコンパクト性の特徴付けが作用素を構成する関数の持つ函数論的性質により述べられてきたが、それらの特徴付けを与える条件と本質ノルムとの関係は不明瞭なまま研究が進められてきた。この函数論的性質と作用素論的性質であるコンパクト性に影響を及ぼす本質ノルムとの関連を明らかにすることは、例えば、この種の作用素のスペクトル・本質スペクトルや作用素が構成する線形空間の位相構造の解明を大きく前進させることが期待されるため、この分野の研究発展のためにも最も急務な課題の一つと考えられる。

私の先行研究において、ベルグマン空間上の荷重合成作用素のコンパクト性は Carleson 測度の条件と新しく導入した Berezin 型変換の境界における挙動で特徴付けられることを示した。本研究の動機は、これらの条件と本質ノルムの関係を明確にすることであった。

もう一つの目的は、 N 変数ベルグマン空間に作用する合成作用素の本質ノルム評価であった。従来の研究では合成作用素を構成する正則写像に単葉性という強い仮定を課すことで、そのコンパクト性に対する特徴付けが与えられてきたが、この単葉性を仮定しない状態でも同様の特徴付けが得られるのではないかという疑問が本研究の動機であり、一般の正則写像に対して角微係数の情報で合成作用素の本質ノルムを評価することでこの問題に対する解答を与えようというのが本研究である。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時の目的は、大きく分けて次の3つであった。

- (1) 荷重合成作用素の本質ノルムに対する評価を与えること。
- (2) N 変数の合成作用素のコンパクト性の特徴付けを与えること。
- (3) 荷重合成作用素のスペクトルと本質ノルムを解析すること。

上記(1)については先行研究で得られた荷重合成作用素のコンパクト性を特徴付ける条件と本質ノルムとの関係を明確にするためのものであり、本質ノルムの評価不等式の確立により、今後の研究進展を図るためにも最優先に取り組まれるべき研究課題であった。(2)はこれまでに部分的に解決されていた N 変数合成作用素のベルグマン空間上でのコンパクト性問題を解決するための研究課題であった。これは、より一般の荷重合成作用素の研究からの帰結でもある。(3)は(1)の研究で得られる作用素ノルムおよび

本質ノルムに対する評価不等式の応用としての研究課題であった。

3. 研究の方法

1年目の研究では、荷重合成作用素の本質ノルムに対する評価不等式の確立を目標に、先行研究で得られていたコンパクト性を特徴付ける Carleson 測度条件と Berezin 型変換の境界挙動と本質ノルムとの間に成立する関係を調べた。この際に、解析関数に Taylor 多項式を対応させる射影を導入し、その射影の性質と本質ノルムに対する近似理論を確立した。また、再生核関数から荷重合成作用素の解析に適する試験関数を構成することで、Carleson 測度条件と Berezin 型変換との相互関係を明らかにした。これにより、荷重合成作用素の本質ノルムと Carleson 測度条件、Berezin 型変換の境界挙動の3つを結びつける評価不等式を確立した。

2年目の研究では、1年目の研究で得られた評価不等式、近似の理論を発展させることで、ヒルベルト空間の場合のベルグマン空間上の荷重合成作用素のコンパクト性を作用素を構成する関数の直接の境界挙動で特徴付ける試みを行った。ここでは、荷重合成作用素の積分表示を新たに見出し、その積分表示と1年目の研究の結果を応用して得られた比較定理を併用することで、Berezin 型変換から荷重合成作用素を構成する関数 u と ϕ の境界点における挙動についての情報を抽出することに成功した。これを用いて、これまでにない新しいコンパクト性に対する必要十分条件を見出す試みを行った。ここでの議論を N 変数への一般化を試みることで、 N 変数合成作用素の本質ノルムと正則写像 ϕ の角微係数についての情報との関係を明らかにする。

4. 研究成果

本研究期間で得られた主な成果は次の通りである。

- (1) N 変数ベルグマン空間上の荷重合成作用素に対する本質ノルムの評価。
- (2) N 変数ハーディ空間上のコンパクトな荷重合成作用素および乗法作用素の特徴付け。
- (3) バーグマン-フォック空間上の荷重合成作用素の特徴付け。
- (4) 重み付きハーディ空間の間に作用する荷重合成作用素と積分作用素の特徴付け。
- (5) 1変数ベルグマン空間上の荷重合成作用素のコンパクト性に対する新しい特徴付け。
- (6) N 変数ベルグマン空間上の合成作用素のコンパクト性と角微係数に関する情報との関係の解明。
- (7) 重み付き関数空間上の積分作用素の特

徴付け。

(1)および(2)に関する従来の研究では, Carleson 測度条件による特徴付けが知られていたが, この条件と本質ノルムとの関連性については触れられていなかった。(1)および(2)で得られた結果は, Berezin型変換を導入することでこの二つの情報を結びつける不等式を与えるに至り, 荷重合成作用素の本質ノルム評価を明らかにした点が目新しい点である。

(3)は, 近年その研究が活発になっている整関数から成るバーグマン-フォック空間上の荷重合成作用素についての結果である。ここでは, Carleson 測度による特徴付けが困難であったが, (1)で確立した本質ノルムに対しての近似理論を応用することで, 荷重合成作用素の性質が Berezin 型変換の境界挙動で特徴付けられることを示した。

(4)では, ベルグマン空間とハーディ空間の間に位置する部分空間を導入し, この部分空間の間に作用する荷重合成作用素についての特徴付けの結果である。近年のこの分野における研究動向の一つとして異なる空間の間に作用する荷重合成作用素の研究が挙げられるが, ベルグマン空間からハーディ空間への荷重合成作用素の研究は行われていなかった。(4)で得られた結果は, この未着手の場合を扱うことを可能にし, 結果としてその場合の特徴付けを与えるに至った。

(5)はこの分野で知られていた結果とは違うタイプの特徴付け, すなわち, 荷重合成作用素を構成する関数の直接の境界挙動によるコンパクト性の特徴付けを与えた。これにより, ベルグマン空間上のコンパクトな荷重合成作用素の具体例の構成が容易となった。ここで用いられた議論は1変数の場合に限る特殊なものであるので, N 変数の場合を含めた形で一般化するためにはもう少し工夫が必要である。このことは, 今後の研究課題となりうるものである。

(6)は(5)の議論を重みなしの特別な場合に拡張することで得られた結果であり, 有界な合成作用素のコンパクト性は正則写像 ϕ の境界点における角微係数の非存在性で特徴付けられ, しかも合成作用素の本質ノルムとこの角微係数に関する情報とが互いに同値であることを示した。これは本質ノルムと角微係数の情報との関係を明確にした点がこの分野において新しい結果であり, これにより合成作用素の本質スペクトルの解析や合成作用素の全体の位相構造の解明が期待される。

(7) 荷重合成作用素の応用としてある種の積分作用素が重み付き解析関数空間に作用する場合の特徴付けを与えた。これは, 積分作用素が荷重合成作用素の一般化であ

ることをノルム評価によって明確にし, 荷重合成作用素の解析で得られた手法を応用することで得られた。これにより, 様々な解析関数空間上で積分作用素を研究するための手法を提示することができ, 今後の積分作用素の解析の基盤を形成することとなった研究である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

① S. Stevic, 植木誠一郎, Weighted composition operator from the weighted Bergman space to the weighted Hardy space on the unit ball, Appl. Math. Comput., 査読有り, Vol. 215, 2010, 3526--3533

② 植木誠一郎, Compact weighted composition operators on weighted Bergman spaces, Acta Sci. Math. (Szeged), 査読有り, Vol. 75, 2009, 693--706

③ 植木誠一郎, Compact composition operators acting between weighted Bergman spaces of the unit ball, Arch. Math., 査読有り, Vol. 93, 2009, 461--473

④ S. Stevic, 植木誠一郎, Integral-type operators acting between weighted-type spaces on the unit ball, Appl. Math. Comput., 査読有り, Vol. 215, 2009, 2464--2471

⑤ 植木誠一郎, Weighted composition operators on the Bargmann-Fock space, International Journal of Modern Mathematics, 査読有り, Vol. 3, 2008, 231--243

⑥ 植木誠一郎, L. Luo, Essential norms of weighted composition operators between weighted Bergman spaces of the ball, Acta Sci. Math. (Szeged), 査読有り, Vol. 74, 2008, 829--843

⑦ 植木誠一郎, L. Luo, Compact weighted composition operators and multiplication operators between Hardy spaces, Abstract and Applied Analysis, 査読有り, Vol. 2008, 2008, Article ID 196498 (12 pages)

[学会発表] (計9件)

① 植木誠一郎, Weighted composition operators on some Fock-type spaces, 2009 Joint Meeting of KMS and AMS, 2009年12

月 17 日, Ewha Womans Univ. (KOREA)

② 植木誠一郎, 1 変数ベルグマン空間上のコンパクト荷重合成作用素について, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会函数論分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学

③ 植木誠一郎, On compact composition operators acting between Bergman spaces, Potential Theory and related Fields, 2009 年 2 月 16 日, 京都大学数理解析研究所

④ 植木誠一郎, ベルグマン空間の間に作用する荷重合成作用素, 第 51 回函数論シンポジウム, 2008 年 10 月 12 日, 高知大学

⑤ 植木誠一郎, ベルグマン空間上の荷重合成作用素に対する本質ノルム, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会函数解析学分科会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

植木 誠一郎 (UEKI SEIICHIRO)

茨城大学・工学部・講師

研究者番号 : 70512408