様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月１０日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）
研究期間：　2008　～2009
課題番号：　20840006
研究課題名（和文）　３次元カラビーヤウ多様体上の安定性条件の研究

研究課題名（英文）　Stability conditions on Calabi-Yau 3-folds

研究代表者
戸田　幸伸（TODA YUKINOBU　）
東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任准教授
研究者番号：　20503882

研究成果の概要（和文）：3 次元カラビーヤウ多様体とは宇宙を記述する際に不可欠となる重要な幾何学的対象であり、物理的にも数学的にも重要な研究対象である。私はこの多様体上の「安定性条件」と呼ばれる概念について研究した。この概念は Douglas や Bridgeland によって導入されたものであるが、3 次元カラビーヤウ多様上に安定性条件を構築することはこれまで困難であった。そこで私は安定性の概念を弱めた「弱安定性条件」の概念を提唱し、実際にそれらを構築することに成功した。更にこの概念を応用して曲線の数え上げ問題のある種の予想(Pandharipande-Thomas 予想)の解決を与えた。

研究成果の概要（英文）：Calabi-Yau 3-folds are important geometric objects in describing our universe, and they are important in both physics and mathematics. I studied the notion called `stability conditions’ on them. This notion was introduced by Douglas, Bridgeland, but so far it has been difficult to construct stability conditions on Calabi-Yau 3-folds. So I proposed the weaker notion `weak stability conditions’ and in fact I succeeded in constructing them. Moreover I applied this notion to curve counting problem, and solved a certain conjecture (Pandharipande-Thomas conjecture).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：　数学
科研費の分科・細目：　代数幾何学
キーワード：　Calabi-Yau 3-fold, Derived category, Stability condition, Donaldson-Thomas invariant

１．研究開始当初の背景

代数多様体上の連接層の導来圏は、超弦理論、非可換代数、シンプレクティック幾何等、様々な分野との対称性を実現する興味深い研究対象である。2002 年頃に Bridgeland が導入した導来圏の安定性条件の概念は、ミラ

一対称性や上記の対称性を理解する上で非常に重要な概念であり、これまで様々な例（2次元以下の代数多様体、非可換代数）においてそれらの具体的な記述が研究されてきた。与えられた導来圏に対し、Bridgelandの安定性条件全体の集合には複素多様体の構造が入ることがBridgelandにより示されている。特にCalabi-Yau 3-fold上の連接層の導来圏上の安定性条件の空間は、弦理論的ケーラーモジュライ空間を数学的に記述すると考えられている。しかしながら、この場合が最も重要な研究対象であるにもかかわらず、具体的に安定性条件を構築する事が非常に困難でありこれまで研究が進展してこなかった。

2007年度に私はBayerと独立に3次元カラビーヤウ多様体上の「極限体積極限」に対応する安定性条件の理論を発表した。私はこれを「極限安定性条件」と読んでいる。これはBridgeland による安定性条件とは定義が異なるが、それを具体的に構成することは容易である。更に対応する安定対象の数え上げ理論を考察した結果、Pandharipande-Thomasらによって導入された「安定対」の理論と深い関係があることが分かった。この関係について、理論をより整備させることによってそれが明快に理解できる形になると、Pandharipande-Thomas によって予想された Donaldson-Thomas (DT) 不変量と安定対の理論との対応を解決する事が出来るのではないかと考えた。ここで DT 不変量とは Calabi-Yau 3-fold 上の曲線の数え上げ理論であり、1998年ころにDonaldson と Thomas によって提唱された概念である。この DT 不変量の研究に導来圏の使用が有効であるとは従来まで考えられてこなかったため、上記の研究を推し進めることで DT 不変量に関する深い結果が得られるのではないかと考えた。

また、上記の流れとは独立に、安定性に依存した DT 不変量の様な不変量が安定性を変えたときにどの様に振る舞うのかについての研究がJoyceによって行われていた。これは「壁越え理論」と呼ばれる。彼の論文は非常に膨大であるが、当時は面白い応用が得られていたわけではなかったため、彼の理論を深く研究していた研究者は少なかった。しかし、この Joyce 氏の理論が上記の Pandharipande-Thomas 予想に不可欠なのではないかと考えた。

更にCalabi-Yau 3-foldの双有理変換の下で導来圏が同値であることが Bridgeland によって示されていたが、これと安定性の理論、壁越え理論等を組み合わせることによって DT 不変量の双有利不変性が示されるのではないかと考えた。最も単純な双有利変換についてはHu-Liによってこの結果は示されていたが、これは DT 不変量の退化公式を用いるものであり、導来圏を用いたものではなかった。そこで導来圏を用いることにより、上記の結果をより内在的に理解できることが可能ではないかと考えた。また Szendroi 氏によって導入された非可換 DT 理論は上記の双有利変換と密接な関係があることが知られており、導来圏を用いた理解が局所フロップの場合に Nagao-Nakajima によって得られている。そこで彼らの結果を大域的な場合に拡張することも興味深い問題の一つであると考えた。

２．研究の目的

Calabi-Yau 3-fold 上の安定性条件について、必要ならば Bridgeland の定義を変えることで、その構成が具体的に与えられるような理論を構築することが一つの目的である。その様な理論は Bridgeland の安定性条件のある種の極限退化点であると考えられ、この様な極限点を変形させることによって Bridgeland の安定性条件を与える可能性がある。そこで、その様なアイデアを推し進めることも目的の一つである。

また、上記の理論に対応する「半安定対象の数え上げ理論」を構築する事も目的の一つである。この様な数え上げ不変量を構築するには、半安定対象のモジュライ理論等、様々な技術的な問題を解決しなければいけない。また上記の数え上げ不変量が安定性を変えた時にどの様に振る舞うのかを理解することにより、Pandharipande-Thomasらにより予想された安定対と DT 不変量の間の対応を実際に証明する事も目的の一つである。

また、半安定対象の空間を導来同値で張り合わせることにより、双有理同値な Calabi-Yau 3-fold の弱安定性条件を比較することが可能になる。そこでこれを応用して、双有利変換における DT 不変量の等価性を示すことも目的の一つである。

更に、上記の議論を応用することにより、より階数の高い DT 不変量の計算にも応用できると考えられる。そこでより階数の高いDT不変量を実際に計算し、従来までの階数が１の理論との関連性を見るのも目的の一つである。

３．研究の方法　2007年度に私が導入した「極限安定性条件」の概念をより一般化、抽象化することによって、様々な安定性条件の構成を試みる。また、Pandharipande-Thomas による安定対の理論と DT 理論との関係が明快に理解できる理論を確立することを考える。これはBayerの「多項式安定性条件」においても考察されていたが、彼の考察した安定性条件は実際に数え上げ不変量の比較をする際には技術的にそぐわない点が存在していた。そこでその技術的な問題点を排除す

る「弱安定性条件」の概念を導入して、理論を整理していく。特に Bridgeland の安定性条件の理論の主定理である、安定性条件全体の集合には複素多様体の構造が入るという事実を弱安定性条件全体の集合においても成立するかどうか考察していく。また上記の事実が弱安定性にも成立する場合、得られた複素多様体が弦理論的ケーラーモジュライ空間の極限退化点全体の空間に対応することも調べていく。更に、弱安定性条件の半安定対象を数え上げる「一般化 DT 不変量」を導入し、これがある弱安定性のパラメータについては Pandharipande-Thomas による安定対の数え上げ不変量、また別の弱安定性についてはDT 不変量を与えることを示していく。上記の議論と、DT 型不変量の壁越え理論を応用することによって、Pandharipande-Thomas の予想を解決することを試みる。DT 型の不変量の壁越え理論を用いるには、Joyce 氏の理論を仮想サイクルを含んだものにしなければいけない。しかし本研究を遂行する間、Joyce-Song、Kontsevich-Soibelman という二つの独立したグループが DT 型不変量の壁越え理論を確立した。そこで彼らが確立した理論を応用することにより、Pandharipande-Thomas 予想を解決することを試みる。

同様に双有利同値な Calabi-Yau 3-fold に対して、弱安定性条件及びその上での壁越え理論を調べることによって、DT 不変量の等価性を調べる。この場合、ある種の非可換代数の層もまた導来同値になるため、Szendori の非可換 DT 理論の大域版を構成して、これと双有利変換との相互作用を壁越え理論を用いて記述する。

また、Joyce-Song, Kontsevich-Soibelman らにより確立された「DT 不変量の壁越え理論」は階数の高い DT 不変量を具体的に計算する際に有用であると考えられる。このように、壁越え理論を有効活用することを試みる。

４．研究成果　Bridgeland の安定性条件を拡張した導来圏の「弱安定性条件」の理論を導入した。これは K 群の filtration のデータを付与することによって与えられ、この filtration は Bridgeland の安定性条件の極限退化の方向を定めている。この弱安定性条件全体の集合を考えると、Bridgeland の安定性条件と同様に複素多様体の構造が入ることが分かった。Bridgeland の安定性条件を Calabi-Yau 3-fold 上に構成することは困難であるが、弱安定性条件については上手く filtration を選ぶことによって具体的に弱安定性条件を構成することができ、実際に半安定対象を調べることが可能になった。

更に具体的に Pandharipande-Thomas 予想を調べるにあたって、導来圏の部分圏で１次元層と Calabi-Yau 3-fold の構造層で生成される部分圏を考察した。この圏は D0D2D6-state の圏と呼ばれる。この圏における弱安定性条件を具体的に構成し、ある安定性のパラメータについては Pandharipande-Thomas の安定対の理論、また他の安定性については DT 理論に対応することを示した。更にこの弱安定性条件での壁越え理論を適用することにより、Pandharipande-Thomas 予想のオイラー数版を証明することに成功した。実際に Pandharipande-Thomas 予想を完全解決するには、導来圏の対象のモジュライ空間が局所的にある正則関数の critical locus として書けることを示す必要がある。しかしこれはすでに Behrend-Getzler によって証明されているとアナウンスされており、実質的に Pandharipande-Thomas 予想が解決された。

双有利同値な Calabi-Yau 3-fold の場合にも、D0D2D6-state の圏の弱安定性条件の空間を考察することによって、目的だった DT 不変量の等価性が示された。また大域的な非可換 DT 理論も導入することができ、この理論もまた通常の DT 理論と生成関数のレベルで等価であることを示した。

またより高次の DT 不変量も、ある種の場合には計算可能になることが分かった。実際に D0D6-state の圏を考え、D6charge が２である様な DT 型不変量を考察した。これは階数が２の場合の DT 不変量と言ってもよい。ある安定性のパラメータについては DT 型の不変量は自明になることが簡単にわかる。そこで壁越え理論を適用することによって、求めたい安定性条件に対する DT 不変量を計算することができる。このアイデアに基づいて階数が２の DT 不変量を壁越え公式によって具体的に計算し、その生成関数を具体的に書き下した。その生成関数は階数が１の場合と密接に関わっていることが判明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１０　件）

① Yukinobu Toda
On a computation of rank two Donaldson-Thomas invariants, to appear in Communications in Number theory and Physics (2010) （査読有）

② Yukinobu Toda
Curve counting theories via stable objects I, DT/PT correspondence, to appear in J. of AMS (2010) （査読有）

③ Yukinobu Toda
Generating functions of stable pair invariants via wall-crossings in derived

categories, to appear in Adv. Stud. Pure. Math (2010) （査読有）

④ Yukinobu Toda and Hokuto Uehara
Tilting generators via ample line bundles, Adv. Math, Vol. 223, 1-29, 2010. （査読有）

⑤ Yukinobu Toda
Limit stable objects on Calabi-Yau 3-folds, Duke Math J. Vol. 149, 157-206, 2009. （査読有）

⑥ Yukinobu Toda and Takehiko Yasuda,
Noncommutative resolution, F-blow ups and D-modules, Adv. Math. Vol. 222, 318-330, 2009. （査読有）

⑦ Yukinobu Toda,
Deformations and Fourier-Mukai transforms J. Differential Geom, Vol. 81, 197-224, 2009. （査読有）

⑧ Yukinobu Toda,
Stability conditions and Calabi-Yau fibrations, J. Algebraic Geom. Vol. 18, 101-133, 2009. （査読有）

⑧ Yukinobu Toda,
Stability conditions and crepant small resolutions, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 360, 6149-6178, 2008. （査読有）

⑨ Yukinobu Toda,
Birational Calabi-Yau 3-folds and BPS state counting, Communications in Number Theory and Physics, Vol. 2, 63-112, 2008. （査読有）

⑩ Yukinobu Toda,
Moduli stacks and invariants of semistable objects on K3 surfaces, Adv. Math. Vol. 217, 2736-2781, 2008. （査読有）

〔学会発表〕（計 ４件）

① Yukinobu Toda, Stability conditions and Donaldson-Thomas type invariants, BPS state counting, stability structures and derived algebraic geometry, Sep 2009, Hamburg, Germany
② Yukinobu Toda, Stability conditions and Donaldson-Thomas type invariants, Modern Moduli, Feb 2009, MSRI, USA
③ Yukinobu Toda, Stability conditions and Donaldson-Thomas type invariants, Jan 2009, Stony Brook University, USA
④ Yukinobu Toda, Limit stable objects on Calabi-Yau 3-folds, Aspects of moduli, June 2008, Scuola Normale Superiore in Pisa, Italy

６．研究組織

(1)研究代表者

戸田　幸伸　（TODA YUKINOBU）

東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任准教授

研究者番号：20503882

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：