様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月　２７日現在

研究種目：若手研究(スタートアップ)
研究期間：　２００８～２００９
課題番号：２０８４００２４
研究課題名（和文）　位相的弦理論の研究

研究課題名（英文）　Study of topological string theories

研究代表者　小西　由紀子（KONISHI YUKIKO）
京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：３０５０５６４９

研究成果の概要（和文）：局所ミラー対称性におけるＢ模型はある種のアフィン曲線とその囲繞空間の相対コホモロジーの混合ホッジ構造とその変形を扱う．これはミラー対称性のＢ模型から派生しており，さまざまな点で類似している．本研究では局所Ｂ模型においてまだよくわかっていなかった湯川結合の定義を与え，Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa の正則アノマリー方程式を提唱した．なお，Batyrev, Stienstra による相対コホモロジーの混合ホッジ構造の変形に関する結果を用いている．

研究成果の概要（英文）：The B-model in local mirror symmetry, which is a variant of ordinary mirror symmetry, deals with the variation of the mixed Hodge structures on the relative cohomology of affine curves of a certain type and its ambient space. Using results by Batyrev and Stienstra , the author gave a definition of the Yukawa coupling and proposed how to modify Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa's holomorophic anomaly equation for the local B-model.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
20 年度	1,060,000	318,000	1,378,000
21 年度	960,000	288,000	1,248,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,020,000	606,000	2,626,000

研究分野：数物系化学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：弦理論・ミラー対称性・混合ホッジ構造

１．研究開始当初の背景

(1) 局所ミラー対称性

局所ミラー対称性はトーリック多様体内のカラビヤウ超曲面におけるミラー対称性から、モジュライ空間（A 模型側では複素化ケーラーモジュライ空間、B 模型側では複素モジュライ空間）においてある極限をとことで得られた双対性である．局所ミラー対称性の主張は以下のようにまとめられる(Chiang-Klemm-Yau-Zaslow (1999)).

△を 2 次元反射的多面体(整数点を頂点にもつ 2 次元凸多面体で，原点を内部に含み，かつ原点と全ての辺との距離が 1 であるようなもの）とする．このような凸多面体は Batyrev によって分類されており，16 個存在する．さて，△から:

(i) Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky によってガウスの超幾何方程式の究極の一般化として定義された GKZ 超幾何系と呼ばれる偏微分方程式系を構成する；

(ii) 弱ファノトーリック曲面 P を構成する：原点以外の整数点で生成される一次元錐たちによって生成される 2 次元完備扇を考える．対応する 2 次元トーリック多様体 P は滑らかな弱ファノ多様体になっている(標準束がネフである)；

(iii) アフィン曲線 C が次の定義方程式によって定まる：

$$F(t) = \Sigma_m \ a_m \ t^m ,$$

ここで $t=(t_1,t_2)$ は 2 次元複素トーラス T^2 の座標，右辺の和は△の整数点 m に関する和，a_m は複素パラメータである．

局所ミラー対称性とは，幾何学的対称である(ii)(iii)が(i)を介して関係しているという現象である．(i)側を局所 A 模型，(ii)側を局所 B 模型と呼ぶ．

(i)と(ii) の関係：
弱ファノ曲面に対しては安定写像のモジュライと標準束を用いて局所グロモフ・ウィッテン不変量 が定義される．局所ミラー対称性の主張（の一部）は種数ゼロのグロモフ・ウィッテン不変量が GKZ 超幾何系のある特異点近傍の解によって記述されるというものである．この主張は Coates-Givental らによって示された．

なお後に局所ミラー対称性とは別の方法で，全種数のグロモフ・ウィッテン不変量の生成関数を対称関数を用いて表す公式が Aganagic-Klemm-Marino-Vafa によって求められた(2003)．

(i)と(iii) の関係：
Batyrev と Stienstra によって，2 次の相対コホモロジー$H^2(T^2,C)$ とそのホッジ構造が求められている(1993,1999)．彼らの結果によると $H^2(T^2,C)$ はその元

$$\omega=(dt_1/t_1\wedge dt_2/t_{2,}0)$$

とガウス・マニン接続によって生成されるωの周期積分の満たす方程式が GKZ 超幾何系である．

(2) B 模型と局所 B 模型の比較

局所ミラー対称性に現れる GKZ 超幾何系は，もともとのミラー対称性においては B 模型側の 3 次元カラビヤウ多様体 X の正則 3 形式の周期積分の満たす Picard-Fuchs 方程式であった．

（普通の）B 模型	局所 B 模型
$H^3(X)$	$H^2(T^2,C)$
正則 3 形式	ω
Picard-Fuchs 方程式	GKZ 超幾何系

上の表のように局所 B 模型は(普通のミラー対称性の)B 模型と非常に類似した構造を持つ．
しかしながら，B 模型の構造全てが局所 B 模型の構造に対応するかというと，(研究を始める時点では) まだ明らかになっていない点があった：湯川結合，Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa の正則アノマリー方程式，フロベニウス多様体構造などである．

(3) アフィン曲線 vs. 3 次元アフィン多様体

これまでの（主に物理の）論文においては，アフィン曲線族 C を扱う場合とアフィン 3 次元多様体 Z の族を扱う場合が混在している．ここで Z は方程式 F(t)+x y で定義される $T^2 \times C^2$ 内の超曲面である． しかしこの研究を始める時点ではこれらの間の関係についてきちんとした説明はなされていなかった．

２．研究の目的
(1) 局所 B 模型において湯川結合，BCOV の正則アノマリー方程式，フロベニウス構造がどうなっているかを調べるのが研究の目的のひとつである．

(2) $H^3(Z)$ と $H^2(T^2,C)$ のどちらも同じ結果を与えると考えられていた．これらのホッジ構造が一致することを示すのがもう一つの目的である．

３．研究の方法

(1)については Batyrev，Stienstra による相対コホモロジー$H^2(T^2,C)$ のホッジ構造とその変形についての結果を使って湯川結合の定義を考えた．正則アノマリー方程式につ

いては,1. 先行論文の例を研究し,2. Witten の幾何学的量子化を用いた正則アノマリー方程式の解釈を参考にした.

(なおフロベニウスの構造がどうなるかはまだ分かっていない.)

(2) については Batyrev の $H^1(C)$の計算を参考にした.

４．研究成果

(1)

(1-1) 湯川結合の定義：

まず Batyrev, Stienstra による $H^2(T^2,C)$ の記述を説明する.

以下のようにしてベクトル空間 R を構成する（R は複素射影空間の超曲面のコホモロジーの研究に現れるヤコビ環とよく似ているので，環ではなくてベクトル空間であるが，ヤコビ環と呼ぶことにする）：

自然数 k に対して

$\triangle(k)=\{ t \in R^2 \mid t/k \in \triangle\}$,
$\triangle(0)=\{0\}$

とし,

$S = \oplus_k \ S_k$,
$S_k = \oplus_m C\ t_0^k\ t^m$ （m は△(k) の整数点）

と定義する．ただし，$m=(m_1,m_2)$に対して $t^m = t_1^{m1}\ t_2^{m2}$ を表す.
S 上の微分作用素 D_0,D_1,D_2 を

$D_0\ (t_0^k\ t^m)= (k+t_0 F(t))t_0^k\ t^m$,
$D_i\ (t_0^k\ t^m)=(m_i+t_0\ F_i(t))\ t_0^k\ t^m$ （i=1,2)

で定義する．第 2 式の $F_i(t)$ は t_i による F(t) の対数微分である．ヤコビ環 R を商空間

$R =S/\ D_0\ S+D_1S+D_2S$

として定義する．R の次元は△の整数点の個数－１に等しい．また R は

$C\ 1\oplus\ C\ t_0\ \oplus\ W\oplus\ C\ t_0^2$

と同型である．ただし W は t_0 の次数１の単項式によってはられる，ある有限次元ベクトル空間である.

Batyrev, Stienstra の結果によると
$H^2(T^2,C)=PH^1(C)\oplus H^2(T^2)$
（ただし $PH^1(C)=H^1(C)/H^1(T^2)$）は R と同型である．またホッジ構造を調べることによって

$C1 \leftrightarrow H^2(T^2) =C\ dt_1/t_1\wedge\ dt_2/t_2$
$C\ t_0 \leftrightarrow\ H^{1,0}(C')$
$C\ t_0^2 \leftrightarrow H^{0,1}(C')$
$W \leftrightarrow PH^1(C)/H^1(C')$

と対応することが分かる．ここで C'はアフィン曲線 C のコンパクト化であり，種数は１である.W の元は C'/C に極を持つ C' 上の(1,0)形式に対応する.

ガウス・マニン接続∇a_m は R 上での微分作用素

$\partial a_m +t_0t^m$

に対応する.

$H^1(C')$の偏極を用いて次のような湯川結合の定義を与えた：

$\langle\partial a_m, \partial a_k, \ \partial a_0\rangle:=$
$\int_{C'}\ (\nabla a_m\nabla a_n\ \omega)'\wedge\ \nabla a_0\ \omega,$
$(n,m \in\triangle\cap Z^2)$.

（右辺の()' の定義は省略する．）

(1-2)正則アノマリー方程式：

（普通のミラー対称性における Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa の正則アノマリー方程式は，複素モジュライ空間のケーラーポテンシャル，ケーラー計量(Weil-Peterson 計量)と湯川結合を用いて書かれる偏微分方程式である．よって
局所 B 模型において正則アノマリー方程式を考えるために、まずアフィン曲線 C の族のパラメータ空間において、これらをどう定義するべきかを考察した．$H^2(T^2,C)$のホッジ構造から,
(a)ケーラーポテンシャルは不要であること,
(b)ケーラー計量の代わりに,∂a_0で張られる接束の部分直線束の，エルミート計量 G を考えるべきであること（G は曲線 C のコンパクト化 C'での正則一形式とその複素共役のペアリングで定義する）
という結論に達した．そしてこのエルミート計量と湯川結合を用いた正則アノマリー方程式を提唱した.

この方程式は Witten 流の幾何学的量子化による解釈と整合的である．つまり，シンプレクティックベクトル空間 $V=H^1(C',R)$上の自明複素直線束 L と標準一形式を接続形式にもつ

L の接続を考える．各パラメータ $a=\{a_m\}_m$ ごとに，$H^1(C',C)$のホッジ分解によって V に複素構造が定まるが、これによる複素偏極を考え，L の偏極切断の集合を $\mathfrak{H}_a$ とする．提唱した正則アノマリー方程式は，パラメータ空間上の無限次元ベクトル束 $\mathfrak{H}=\cup_a \mathfrak{H}_a$ 上のある射影的平坦接続にほかならない．

(2) 3 次元アフィン多様体 Z の 3 次のコホモロジー $H^3(Z)$を Batyrev の $H^1(C)$の計算と同様にして求め, $H^3(Z)$がヤコビ環 R と同型であることを示した．つまり $H^3(Z)$は $H^2(T^2,C)$と(複素ベクトル空間として)同型である．また(複素ベクトル空間として)ウェイト、ホッジフィルトレーションが一致することも分かった．
(ただし，Z 構造が一致するかどうかは分かっていない．)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0 件）

〔学会発表〕（計　4 件）

①Yukiko Konishi,
"Local B-model and Mixed Hodge structures", in
Symplectic Geometry and Physics (2010 年５月 17-21 日，Nankai University, 中国)

② Yukiko Konishi, "Local B-model and Mixed Hodge structures", in
Mirror Symmetry and Gromov-Witten theory (2010 年 1 月 11-15 日，National Institute for Mathematics Sciences,韓国)

③ Yukiko Konishi, "Local B-model and Mixed Hodge structures", in
Focus Week on New Invariants and Wall Crossing (2009 年 5 月 18-22 日，数物連携宇宙研究機構)

④Yukiko Konishi,
"Higher genus Gromov-Witten invariants of the Grassmannian, and the Pfaffian Calabi-Yau threefolds", in
The geometry and integrability of topological QFT and string theory (2008 年４月５日, University of Warwick)

〔図書〕（計　0 件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）
〔その他〕
ホームページ等　　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
　小西　由紀子（KONISHI YUKIKO）
　京都大学・大学院理学研究科・准教授
　研究者番号：３０５０５６４９

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし