**様式 C-19**

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 4 月 1 日現在

研究種目：若手研究(スタートアップ)
研究期間：2008～2009
課題番号：20840041
研究課題名（和文）シューベルトカリキュラスへの代数的位相幾何学からのアプローチ

研究課題名（英文）An algebraic topological approach to Schubert calculus

研究代表者
鍛治 静雄（KAJI SHIZUO）
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：00509656

研究成果の概要（和文）：空間を滑らかに変形してゆくときに見られる対称性は，その空間に対するリー群の作用によって記述される．その様子は，リー群そのものやリー群が作用する空間の不変量を通して調べることができる．本研究では特に，その幾何学的な不変量と代数的な構造が綺麗に対応している，旗多様体と呼ばれる種類の空間について，代数的位相幾何学の手法を用いた具体的な計算を通してその詳細を考察した．

研究成果の概要（英文）：The symmetry of spaces transformed continuously is mathematically described through actions of Lie groups, which can be caught by invariants of the Lie groups and the spaces acted by them. In this research project, we investigate Schubert calculus, the study of the geometry of a certain class of spaces called flag varieties, which appear as the quotient of Lie groups. We took an algebraic topological approach to it and calculated some invariants of flag varieties explicitly.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2008 年度 | 1, 320, 000 | 396, 000 | 1, 716, 000 |
| 2009 年度 | 1, 200, 000 | 360, 000 | 1, 560, 000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 2, 520, 000 | 756, 000 | 3, 276, 000 |

研究分野：代数的位相幾何学
科研費の分科・細目：数物系科学・幾何学
キーワード：①位相幾何学②ホモトピー論③リー群④群作用をもつ空間の位相不変量⑤旗多様体

## １．　研究開始当初の背景

19 世紀 H.Schubert によって確立された enumerative geometry，例えば３次元空間内に４本の直線が与えられたとき，その全てと交点を持つ直線は何本あるか，という様な数え上げの問題は，今日では旗多様体や射影的等質空間と呼ばれるある射影多様体のコホモロジーの言葉を用いて定式化されている．複素 Lie 群 G とその Borel 部分群 B（より一般には放物型部分群 P）に対して，等質空間 G/B (G/P) は非特異射影多様体の構造を

持つことが知られており，旗多様体(射影的等質空間)と呼ばれる.旗多様体は特別な場合として，例えばグラスマン多様体を含んでいる.
旗多様体及び射影的等質空間のコホモロジー環の研究はシューベルトカリキュラスと呼ばれ，代数幾何学，表現論，組み合わせ論，シンプレクティック幾何学等の様々な分野の交差点となっている.
その基本的な問題設定は次の通りである.

G の Weyl 群を W とすると, G/B は W で指数付けされたシューベルト胞体 V_w = BwB/B による胞体分割を持つことが知られている. (射影的等質空間 G/P の場合も同様に, W のある部分集合によって指数付けされたシューベルト胞体による同様の分解を持つ).
V_w の閉包はシューベルト多様体と呼ばれる特異部分多様体になり，その基本類は G/B のコホモロジー環（Chow 環と同型である)の基底をなす.
二つのシューベルト多様体のカップ積(交叉積)をシューベルト多様体の線形和で書いたときの係数は構造定数と呼ばれ，部分多様体の交叉数の数え上げ(最初にあげた問題は，4 次元線型空間の 2 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体の場合に帰着する)や，グラスマン多様体の場合は既約表現のテンソル積の重複度である Littlewood-Richardson 係数等，多方面からの解釈ができる.
また常コホモロジーに限らず，K 理論や量子コホモロジー，さらにはそれらの極大トーラスの作用による同変版等，様々なコホモロジー論においても，構造定数は表言論的または幾何学的意味づけを与えられている.
これらの構造定数を決定することがシューベルトカリキュラスの主目的である.

## ２．研究の目的

背景の項で述べたシューベルトカリキュラスにおける主問題である，構造定数の決定に向けて，ひとつの方針であり最も有力なものは，まず旗多様体のコホモロジー環を多項式環の剰余環として表示し，さらに与えられたシューベルト多様体の基本類を代表する多項式を見つけてくるという方法である. これは，シューベルト多項式の決定の問題と呼ばれる. (K 理論の場合は Grothendieck 多項式，同変コホモロジーでは二重シューベルト多項式と呼ばれる).
シューベルト多項式のとり方には任意性があり，またその選び方は Lie 群の型によって大きく違ってくる.
古典 Lie 型の場合には，``良い性質", 例えば階数による安定性の条件などを課すと一意に定まり，その具体的な形もこれまでの多くの先行研究において与えられてきている. しかし例外 Lie 型に関しては，シューベルト多項式の候補や``良い性質"をどうするべきかさえ明らかではない.その最大の理由は，例外 Lie 型の旗多様体のコホモロジー環が非常に複雑であり，現在主流である組み合わせ論的考察からだけでは全く歯が立たないからである.
この様に，例外 Lie 型に関してのシューベルトカリキュラスの研究は，現在まで殆ど皆無といってよい.
本研究では，代数的位相幾何学からの手法を用いて，G_2, F_4, E_6, E_7, 及び E_8 の 5 つの例外 Lie 型のシューベルト多項式を探すことを第一の目的とした.
さらに関連する問題として，例外型リー群の Chow 環の決定，安定不変式の決定なども考察した.

## ３．研究の方法

古典型の旗多様体のコホモロジー環については，多項式環の剰余環としての表示は古くから知られている一方，例外型についてはその様な表示はごく最近になって計算された.
この表示は非常に複雑であり，また幾何学的な意味が読み取りづらい形をしているため，本研究の第一のステップは，この表示をより扱いやすい形に書きなおすことである.
これは divided difference operator という組み合わせ論のアルゴリズムを元に，計算機を用いて具体的な対応を与えることでなされる. また，そのような具体的な対応が得られると，応用として Lie 群の Chow 環を計算することができ，これにより Grothendiek が 1950 年代に開始した半単純複素代数群の Chow 環の計算を，短連結群に関して全て完成させることができる.
また古典的な問題である Weyl 群の不変式環についても，その安定不変式の基底を具体的に決定することができる.

同変コホモロジー環については，多項式表示のほかに，固定点への局所化の情報から得られる GKM グラフと呼ばれる組合せ論的な表示が有効である. 多項式表示と GKM グラフによる表示との関連を調べることにより，同変コホモロジー環を決定することができる.

## ４．研究成果

常コホモロジーについては，香川高専の中

川征樹氏と共同で，例外型旗多様体 E_6,E_7,E_8 のコホモロジーのシューベルト類を生成元にとった表示を与えた．これにより，全ての旗多様体についてのそのような表示が完成したことになる．また応用として，単連結単純複素代数群の Chow 環をその分類に従って全て決定することができた．
さらに，一般化されたグラスマン多様体についても，そのコホモロジー環の同様の表示を与えている．これらの成果は，いくつかの研究集会等で発表しているが，論文は現在投稿準備中である．

旗多様体の，極大トーラスの作用に関する同変コホモロジーについては，代数的位相幾何学の立場から，Borel が与えた常コホモロジーのワイル群の余不変式環による表示を用いる手法を，同変コホモロジーの場合に整理し，GKM グラフによる表示(固定点への局所化写像)との関連性，ワイル群の二つの作用を明確に記述した．

旗多様体のコホモロジー環の表示を得る為に用いられた，divided difference operator など余不変式環を扱うプログラムを，数式処理ソフトウェア Maple 上のスクリプトとして実装し，さらにそれを上記の考察を元に発展させ，同変コホモロジーの GKM 表示や二重多項式表示を扱える様に改善した．それを用いて，例外型旗多様体 G_2 の同変コホモロジー環をその上のワイル群の作用を込めて決定した．また，そこで得られた結果を元に二重シューベルト多項式の候補を与えた．
さらに，二重シューベルト多項式から，正値性を持った通常のシューベルト多項式を導出する一般的な公式を発見し，上記 G_2 型の場合に適用することで，通常のシューベルト多項式の候補も与えた．
同様の計算は，他の例外型旗多様体にも適用可能であるが，その結果は大変煩雑な物となる為，今後はそこから組み合わせ論的な性質を抽出することが望まれる．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① <u>Shizuo Kaji</u> and Daisuke Kishimoto, Homotopy nilpotency in $p$-regular loop spaces, Mathematische Zeitschrift, vol.264, no.1, 209--224, 2010. 査読有

〔学会発表〕（計７件）

① <u>Shizuo KAJI</u>, "SCHUBERT CALCULUS, SEEN FROM TORUS EQUIVARIANT TOPOLOGY", KAIST Toric Topology Workshop 2010, Korea Advanced Institute of Science and Technology, February 25, 2010

②<u>鍛冶静雄</u>,"G2 型旗多様体の同変コホモロジー", 福岡ホモトピー論セミナー, 福岡大学セミナーハウス, 2010 年１月９日

③ <u>Shizuo KAJI</u>, "Torus equivariant cohomology of flag varieties",
The Third East Asia Conference on Algebraic Topology, Vietnam National University, Hanoi, Dec. 17th, 2009.

④ <u>鍛冶静雄</u>, “リー群のトポロジーから見るシューベルトカリキュラス”, 第 56 回トポロジーシンポジウム 北海道大学, 2009 年８月 10 日

⑤ <u>鍛冶静雄</u>, "Divided difference operator and equivariant cohomology",トポロジー小研究集会, Mar. 18th, 2009, 信州大学.

⑥ <u>Shizuo KAJI</u>, "An algebraic topological approach toward concrete Schubert calculus", The 2nd East Asia Conference on Algebraic Topology, Dec. 19th, 2008, National University of Singapore

⑦ <u>Shizuo KAJI</u>, "Mod 2 cohomology of some low rank 2-local finite groups", Shizuo KAJI, International Conference on Algebraic Topology, Oct. 5th, 2008, Korea University.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕（計０件）

〔その他〕

・ホームページ等
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kaji

・研究会などの開催
第３回 Lusternik-Schnirelmann カテゴリー研究集会「L-S カテゴリと Robot Motion

Planning」, 2008 年 10 月 29 日～10 月 31 日, 唐津市. 共同オーガナイザー

６．研究組織

(1)研究代表者
鍛治 静雄（KAJI SHIZUO）
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：00509656

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：