

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20H01806

研究課題名(和文)作用素環論と関数解析的群論

研究課題名(英文)Theory of operator algebras and functional analytic group theory

研究代表者

小沢 登高(Ozawa, Narutaka)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：60323466

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文)：従順性とKazhdanの性質の2つは解析的群論における最も重要な概念である。作用素環に対する群作用の従順性には幾つかのもっともらしい定義が提案されてきたが、鈴木悠平氏との共同研究でそれらがすべて同値であることを示し、応用を与えた。有限生成環 R の基本行列群 $EL_d(R)$ がKazhdanの性質を持つというのは基本定理のひとつである。この定理を非単位的な有限生成環に一般化することの成功した。粗距離空間上の作用素で有限伝播的作用素で近似できるものは擬局所的であるが、その逆も成り立つかというのは四半世紀に亘る未解決問題であった。本研究計画では反例を構成することで、この問題に決着をつけた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

群作用の従順性は群作用の研究において欠かすことのできない道具である。この理論を整備し、新たな例を与えた鈴木氏との共同研究成果には高い学術的価値がある。基本行列群は重要な研究対象であるが、無数の基本行列群を一斉に扱う際に非単位的な環を扱う必要が出てくる。環が非単位的になることにより、大きな技術的問題が生じるが、それを克服する初めての手法を見出したことの意義は大きい。近似的有限伝播性と擬局所性が同値であるか否かは粗距離空間上の作用素論における最重要未解決問題のひとつであった。確率論的手法による反例の構成は未解決問題を解決するのみならず、さらなる研究領域を切り開く重要な学術的進展である。

研究成果の概要(英文)：Amanability and Kazhdan's property are the two most important concepts in analytic group theory. In the joint work with Yuhei Suzuki, the PI has proved that the several notions of amenability for group actions on operator algebras that have been proposed are all equivalent and given applications of this result. The elementary matrix group $EL_d(R)$ for a finitely generated ring R is the most prominent example of groups with Kazhdan's property. The PI generalizes this fact to a non-unital ring. It is well-known that every operator on (the l_2 space of) a uniformly locally finite metric space that is approximable by finite-propagation operators is quasi-local. Since introduced in 90s, it has been questioned whether the converse also holds true. The PI has answered this in negative by constructing counterexamples.

研究分野：作用素環論

キーワード：解析的群論 離散群 作用素環論

1. 研究開始当初の背景

群は与えられた構造の対称性を記述するための数学的言語であり、科学研究全般において自然に表れる、基本的かつ最重要の研究対象である。群はもとより代数学的存在であるため、これまでの群の研究では主に代数学的あるいはより近年においては M. Gromov の提唱した幾何学的なアプローチが取られることが多かった。

(1) 群は抽象解析学の一分野である作用素環論の研究においても特別な役割を果たしている。解析学と代数学を繋ぐ架け橋となるものが従順性と呼ばれる性質で、これまでの長い研究の成果から経験的に、従順性の存在のもとでは現象が整然としていて構造を十分に把握できるが、従順性の存在しないところでは極めてワイルドになるという dichotomy が知られている。作用素環に対する群作用に従順性の概念を導入するにあたって、幾人もの研究者が幾種もの定義を提案してきたが、それらの間の関係は不明であり、従順作用の例が豊富に存在するの否かも不明であった。複数の定義のなかにもっとも自然なものが Anantharamann-Delaroché (1987) によるものである。近年になって作用素環に対する群作用の分類がホットトピックとなり、単純 C^* 環上の従順作用の非自明な例が発見(鈴木, 2020)されるに至って、研究者の間で従順作用に関する興味が高まっていた。

問題 1 : 複数が提案されている従順作用の定義は同値か?

(古典的な)従順性の驚くべき特長の一つは同値な定義が無数に存在することである。それにより与えられた群について従順性の条件を確認しやすくなるのである。こうしたことが応用の広さと相まって従順性を解析的群論における最重要の概念にならしめていると言える。

(2) Kazhdan の性質(T)は、従順性と並び、解析学的群論における最も重要な概念で、エキスパンダーグラフの構成等を通じて、純粋数学のみならず応用数学から計算機科学に及ぶ幅広い応用がある。与えられた群がこの性質を持つか否かを決定することは、大抵困難ではあるが、大変に意義のあることである。Kazhdan の性質を持つ群の最も prototypical な例が $SL_n(\mathbb{Z})$, $n > 2$ である(Kazhdan, 1967)。同じことが整数環 \mathbb{Z} を有限生成環 R に置き換えた群 $EL_n(R)$ についても成り立つ(Ershov-Jaikin-Zapirain, 2010)。Kazhdan の性質には、群の生成系に付随して Kazhdan 定数というものが定義される。Kazhdan の性質の量的な応用ではこの Kazhdan 定数の評価が必要になる。 $SL_n(\mathbb{Z})$ の場合に Kazhdan 定数が生成系に依らない様な評価が存在するか? すなわち

問題 2 : $SL_n(\mathbb{Z})$ は一様 Kazhdan の性質を持つか?

は重要な有名未解決問題である。例えば整数環 \mathbb{Z} の生成系として $\{p, q\}$ (p と q は互いに素) を考えると、それに伴い $SL_n(\mathbb{Z})$ の生成系 $S_{p,q}$ を得られるが、こうした生成系らについて一様な Kazhdan 定数の評価は存在するだろうか? この問題の難しさは対 (p, q) に関して「母」生成系を考えると整数環 \mathbb{Z} が非単位的な $Z\langle x, y \rangle$ (定数項が 0 の二変数多項式環) になってしまうことにある。非単位的な環 R について $EL_n(R)$ は、冪零商群が存在するため、Kazhdan の性質を持たない。非単位的な環 R について $EL_n(R)$ が満たすような Kazhdan の性質の類似物があれば問題 2 の解決に向けたステップになるとと思われる。

(3) 作用素環のユニタリ群は位相が局所コンパクトでないので扱いが難しい位相群であるが、標準的な仮定の下で Polish 群(完備可距離可付け可能群)となる。作用素環の分類理論に関して、作用素環のユニタリ群がいつ Polish 群として従順性の条件を満たすかを知ることは極めて重要なことである。作用素環が von Neumann 環の場合に、ユニタリ群の汎弱位相に関する従順性と von Neumann 環の入射性が同値であるというのは作用素環論の柱石を成す基本定理である(Connes 1974)。この定理は即、 C^* 環のユニタリ群の弱位相に関する従順性が核型性と同値であることを導く。 C^* 環のユニタリ群の最も自然な位相は強位相(=ノルム位相)である。核型 C^* 環の分類問題に関連して、いつユニタリ群が従順であるかは重要未解決問題である。

問題 3 : C^* 環のユニタリ群は強位相に関していつ従順か?

驚くべきことに、コンパクト位相空間 X とコンパクト群 K に対して、Polish 群 $C(X, K)$ がいつ従順となるかといった基本的なことでさえほとんど分かっていない。しかし、 C^* 環に単純性の仮定を置けば、証明は困難かもしれないが、現象自体はすっきりするものと推測されている。

(4) コンパクト多様体上の楕円型微分作用に対する Atiyah-Singer の指数定理は 20 世紀の数学における金字塔である。多様体がコンパクトでないときは指数理論の受け皿として、近似的有限伝播的作用素のなす作用素環を考える必要が出てくる(J. Roe, 1980s)。近似的有限伝播的作用素が擬局所的となることはこれらの概念が導入された当初から指摘されてきたが、その逆が成り立つか否かは積年の未解決問題であった。

問題 4 : 近似的有限伝播性と擬局所性は同値か？

楕円型微分作用素の場合は指数理論の受け皿として近似的有限伝播的作用素を考えればよかったが、より一般の楕円型擬微分作用素となると擬局所作用素を考えなければならないことが指摘されている(Engel, 2018)。また、近似的有限伝播性は外延的な概念であり、擬局所性は内包的な概念であることから、両者の一致は理論上大変に都合が良い。実際、考えている距離空間が良い条件を満たすのなら、問題 4 の答えは正しいという結果がこれまで幾つも得られてきた。最新のものが Spakula—Zhang (2020)によるもので、境界従順である距離空間上では問題 4 の答えが肯定的であるというものである。しかし、境界従順の条件を満たさないコンパクト(リーマン)多様体は幾らでも存在することが知られている。

2 . 研究の目的

本研究計画は、解析学的手法を用いて群の大雑把ではあるが頑健な幾何学的情報を精密かつ繊細な代数的構造解析に繋げることを目的とした。このことにより、それまで無関係であった分野を結び付け、未解決問題を解決するのみならず、新たな研究領域を切り開くためである。解析学的手法の中でも、無限次元の位相ベクトル空間およびその上の代数を扱う作用素環論的手法あるいは関数解析学的手法を用いる。

本研究計画では特に上記の問題の解決を目指した。課題(1)では作用素環上の群作用の従順性に関する理論を整備することで、群作用の研究がより発展するようになることを目指した。課題(2)では以前の研究において計算機から学んだことを人力で行う数学に還元することを目論んだ。つまり、以前に $\text{Aut}(F_n)$ が Kazhdan の性質を持つことを大規模計算機を用いて証明しているが(Ozawa 2016, Kaluba—Nowak—Ozawa 2019, Kaluba—Kielak—Nowak 2021) 計算機による証明(数学的に厳密なもの)であったため、Kazhdan の性質を持つという結論が正しいことは確認できたが、なぜ正しいのかの理由が見えてこなかった。しかし過程で計算機から結論以外にも多くの(玉石混交の)洞察を得ることができた。例えば、人間にはパラメータを変えただけで同様に見えた問題でも計算機が答えにたどり着くまでの所要時間が問題によって大幅(数週間~数十秒)に異なるといった具合のことである。得られた洞察の意味について考えることで、新たな研究の方向性を模索した。課題(3)では作用素環のユニタリ群の従順性を調べることで、分類理論への応用、および従順 Polish 群の興味深い例を見つけることを目的とした。課題(4)ではエクспанダー列などの特別な距離空間の例を使い、距離空間上の Hilbert 空間作用素に対する有限伝播性と擬局所性といった幾何学的条件の違いを見出すことを目標とした。

3 . 研究の方法

数学の研究はアイデア勝負である。実際の研究には、個人で行う部分と他者と協力して行う部分がある。大部分は個人で紙とペンを使いアイデアを練り、成すべきことが分かったら集中して研究を深めるものである。しかし、アイデアが枯渇したときや、そもそも自分にないアイデアを求めて他者と交流することは研究が自分の想定を超えて展開するために重要なことである。そのため各種の研究集会に参加するほか、関連研究者ら一定期間自由な時間をともにする。時には計算機を動かして非厳密な実験を行ったり、厳密な証明を行ったりもする。

4 . 研究成果

北海道大学の鈴木悠平准教授との共同研究で問題 1 を肯定的に解決し、従順作用の理論を整備した。応用として Meyer による同変 Pimsner 構成が従順作用の例となることを証明し、単純作用素環上の従順作用をシステムティックに構成する手法を得た。作用素環上の群作用の分類研究における重要な成果と言える。論文は『Selecta Mathematica』に掲載された。

非単位的有限生成環 R について基本行列群 $\text{EL}_n(R)$ が満たすような Kazhdan の性質(T)の代替を導入した。 R が単位的な場合は、Kazhdan の性質と一致するものであるため、この業績は Ershov—Jaikin—Zapirain の有名定理(2010)の部分的な一般化となっている。さらにこの業績の応用として、 $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ が上で述べたようなある種の生成系に対して一様性を持つことを示すことができた。論文は『Analysis & PDE』に掲載予定である。なお、問題 2 は依然として手の届かない目標となっている。

C^* 環のユニタリ群がいつどのような従順性を持つのか調べ、 C^* 環が単純の場合に問題 3 に部分的な解答を与えた。また、 II_1 型超有限因子環のユニタリ群が弱位相に関して従順ではないが歪従順であることを証明した。歪従順性と従順性の概念は局所コンパクト群で一致するが、Polish 群でも歪従順性が従順性を導くか否かは懸案の未解決問題であった。またランダム行列モデルを使った自由群 C^* 環の研究を行った。論文は『Munster Journal of Mathematics』の Eberhard Kirchberg 教授追悼号に掲載予定である。なお、問題 3 は依然として未解決である。

問題 4 を否定的に解決し、距離空間がエクспанダー列を含むなら、擬局所的であるが近似的有限伝播的でない作用素が存在することを証明した。反例の確率論的な構成法は問題 3 の否定的解決にとどまらず、新たな研究領域を広げる学術的進展である。論文は『Journal of the European Mathematical Society (JEMS)』に掲載予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 N. Ozawa, Y. Suzuki	4. 巻 27
2. 論文標題 On characterizations of amenable C^* -dynamical systems and new examples	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Math. (N.S.)	6. 最初と最後の頁 29pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-021-00699-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 N. Ozawa	4. 巻 -
2. 論文標題 A substitute for Kazhdan's property (T) for universal non-lattices	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Analysis & PDE	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Ozawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Amenability for unitary groups of simple monotracial C^* -algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Munster Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Ozawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Embeddings of matrix algebras into uniform Roe algebras and quasi-local algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society (JEMS)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 N. Ozawa
2. 発表標題 Amenability for C^* -dynamical systems
3. 学会等名 Operator algebras and Group Dynamics (CIRM) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 N. Ozawa
2. 発表標題 A substitute for Kazhdan's property (T) for universal non-lattices
3. 学会等名 Measured Group Theory (CIRM) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 N. Ozawa
2. 発表標題 Kazhdan's property (T) for $\text{Aut}(F_n)$ and $\text{EL}_n(\mathbb{R})$
3. 学会等名 PRIMA Congress 2022 (Plenary Talk) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 N. Ozawa
2. 発表標題 Amenability for unitary groups of C^* -algebras
3. 学会等名 C^* -Algebras: Tensor Products, Approximation & Classification (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 N. Ozawa
2. 発表標題 Sum of squares methods for operator algebras
3. 学会等名 YWC*A (Leuven 2023) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究成果、講義ノート、講演スライド等をウェブサイトで公開している https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/</p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
カナダ	Fields Institute		