

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20H04195

研究課題名（和文）疎行列を係数とする線形方程式の反復解法と精度保証付き数値計算法の融合

研究課題名（英文）Fusion of Iterative Solvers for Linear Equations with Sparse Matrices and Verified Numerical Computation Methods

研究代表者

尾崎 克久（Ozaki, Katsuhisa）

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：90434282

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 13,000,000円

研究成果の概要（和文）：疎行列を係数行列とする連立一次方程式の反復解法に対して、精度保証付き数値計算を行えるようにするため、SuiteSparse Matrix Collectionにある行列の逆行列の最大値ノルムを事前に計算し公開した。これにより、近似計算の約2倍以内（近似計算の時間を含む）でタイトな誤差上限を求める精度保証付き数値計算が多くの問題で可能となった。また、連立一次方程式に対して、誤差の観点で非常に良い近似解が求められる複雑な手順が不要な混合精度反復解法を開発し、数値実験によりその有用性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

SuiteSparse Matrix Collectionにある行列は、科学技術計算において具体的に現れる行列であり、反復解法の有用性を評価するためによく使用されてきた。通常、相対残差ノルムを用いて近似解の良し悪しを議論してきたが、相対誤差の観点から精度を議論できるようになり、新たな視点で反復解法を評価し、より深い精度の議論が可能となった。反復解法は多くの分野のシミュレーションにおいて必須であり、この研究で可能としたこと、提案した反復解法は将来のシミュレーション技術の発展に寄与するものである。

研究成果の概要（英文）：To enable verified numerical computations for iterative solvers of systems of linear equations with sparse coefficient matrices, we precomputed and published the maximum norm of the inverse matrices from the SuiteSparse Matrix Collection. This allows verified numerical computations to obtain tight error bounds for many problems within approximately twice the time of approximate computations (including the time for approximate computations). Additionally, we developed a mixed-precision iterative solver for systems of linear equations that does not require complex procedures to obtain very good approximate solutions from an error perspective, and demonstrated its usefulness through numerical experiments.

研究分野：精度保証付き数値計算

キーワード：精度保証付き数値計算 連立一次方程式 反復解法

1. 研究開始当初の背景

数値計算は現代の計算機で高速に実装され、浮動小数点数とその演算が用いられる。標準的なラップトップ型計算機では1秒間に 10^9 回以上、最先端のスーパーコンピュータでは1秒間に 10^{17} 回程度の浮動小数点演算が可能であった。当時、国内では富岳の完成が待望され、京コンピュータの20倍から30倍の性能向上を見込み、計算速度の著しい向上を見込んでいた。この計算速度の向上により、新材料・創薬・災害対策・宇宙の起源などの分野の研究がさらに進む期待が寄せられていた。

最も広く使用される浮動小数点数とその演算は1985年に規定され、2008年に改定されたIEEE 754標準規格によって定められたものであり、32ビットや64ビットの2進浮動小数点数が現在最も使用されている。データサイエンスのために、16ビットの2進浮動小数点数のサポートがはじまり、更なる低精度演算の実装がGPUでは始まったが、ハードウェア実装で高精度な浮動小数点演算を扱うことは、結果として40年近くの間進んでいない。計算機性能の向上によって、問題が大規模化し、それに伴い演算回数は増加し、丸め誤差はより多く蓄積する。今後は計算結果の信頼性に向き合うことが現在よりも必要になると見込まれた。

多くのシミュレーションは、「現象を微分方程式を用いた支配方程式で記述する」、「微分方程式を離散化して、連立一次方程式に帰着」、「連立一次方程式を数値計算で近似的に解く」という手順を経る。最後に扱う連立一次方程式の係数行列は疎行列であることが多く、行列とベクトルの積を反復的に計算するだけで解が求まる反復解法がよく使用される。クリロフ部分空間法系統の反復解法では、行列の次数 n に対して、理論上 n 回の反復により厳密解が求まることが示されている。一方で、すべての計算が厳密であることを仮定しているため、有限精度の浮動小数点数とその演算を用いた場合には厳密解が求まらない。よって、反復を停止する収束条件を与え、それを満たす近似解を求める。連立一次方程式に対する反復解法では、主に「相対残差ノルム」や「異なるソルバにより得られた近似解との比較：経験則による誤差の推定」が行われていた。ここで、以下の事例を挙げる。

事例：収束判定と実際の誤差

テスト行列を集めた世界最大のwebサイトである「SuiteSparse Matrix Collection」からfs_183_3という行列をダウンロードし、解ベクトルのすべての成分をほぼ1に設定した連立一次方程式を生成する。この問題に対して、許容相対残差を 10^{-10} に設定した安定化双共役勾配法(BiCGStab法)を実行すると、相対残差ノルムは $8.1 \cdot 10^{-11}$ を満たし、1604回で反復は成功裏に停止した。ところが、近似解の最大相対誤差は54.8であり、1桁も正しくない成分が存在した。

残差と誤差は別の指標であり、相対残差ノルムのみを用いた信頼性の議論の危険性を示唆している。また、複数のソルバによる近似解の比較は、環境毎にコードの開発が必要になるためにコストが高く、さらに精度の保証にはならない。誤差に着目した議論を行いたいが「真の解がわからなければ誤差は把握不可能」、「真の解を得ることが難しいために数値シミュレーションを行っている」という相容れないギャップが本質的であるため、誤差に着目した研究が行われてこなかった実情があった。よって、誤差に着目した研究を推進し、新たな知見を基にすれば、高信頼計算の分野の発展に貢献することが期待されていた。ここで誤差に向きあう精度保証付き数値計算に活躍の場が与えられていた。

2. 研究の目的

数値線形代数は、物理現象、社会現象のシミュレーションを含む非常に多くの分野に 응용があり、科学技術計算に必要不可欠である。特に、疎行列を係数行列とする連立一次方程式は多くの問題に現れ、主に反復解法を用いて近似解を得る。従来の反復解法では、相対残差を基準として収束判定を行っていることが多く、「収束しない」、または「真の解からほど遠い結果」を得るなど、精度面に問題がある事例がある。また精度の検証に関する第二の選択肢として、複数の近似解法において得た近似解を比較する方法がある。本研究では、精度の検証に関する第三の選択肢として「誤差」に着目した精度保証付き数値計算を、疎行列を係数行列とした連立一次方程式へ展開する。応用から現れる様々な行列を集めた国際的に知られた行列データ群であるSuiteSparse Matrix Collectionにある90%の正方行列、すなわち約2000の行列に対して「反復解法」を用いた精度保証法を適用できるように目標を立てた。具体的には

SuiteSparse Matrix Collectionにある行列を係数とする連立一次方程式の精度保証に要するコストは、近似解の計算時間と同等になることを目標とし、高速かつ高信頼な数値計算を

達成する．そのために逆行列の最大値ノルムを事前に求めてデータ化
反復法の高速度性と精度保証の信頼性が融合した数値計算法の構築
を行うことを目的とした．また，精度保証付き数値計算自体の発展にも寄与すべく，特に
行列積の包含（下端と上端を求めること）の効率化に関する研究
GPU の混合精度計算による高精度な行列積アルゴリズムの開発
標準固有値問題の固有対，特異値分解における特異値と特異ベクトルに関して，高速な反復
改良法の提案
標準固有値問題について，厳密な精度の評価を可能とするテスト問題の生成法の開発
についても研究成果を挙げることを目的とした．

3．研究の方法

項目ごとに行った研究方法について述べる．

精度保証付き数値計算により疎行列を係数行列とする連立一次方程式の数値解の精度保証
法を進展させる．具体的には，Suite Sparse Matrix Collection にある疎行列に対して低
コストで精度保証を行える環境を構築するための逆行列の最大値ノルムの上限を計算した．
この最大値ノルムが事前に求まっていれば，残りの精度保証付き数値計算に必要な計算コ
ストは行列のサイズの 2 乗に比例するコストで済み，計算がごく短時間で終了するため
である．

連立一次方程式の反復解法の発展に寄与する研究を行った．また，精度が保証されたこと，
すなわち残差ではなく誤差に着目して反復解法を考察し，新たな手法の開発に挑むこと
を行った．残差は停滞しているが，誤差の意味では反復に意味があるのか？などを考察しな
がら，新たな手法の開発に挑んだ．

行列積の包含について，基本的に区間演算の半径は相対的に増える一方であるため，なる
べく初期の演算にはコストを払ってでも過大評価を抑える方針で，その後の計算では高速な
手法を採用し，全体として計算コストのバランスをとる新しいアルゴリズムの開発を行っ
た．

GPU の混合精度計算による高精度な行列積アルゴリズムの開発について，高速な整数計算
Tensor Core を活用するエラーフリー変換法を開発する．入力が 8 ビットであるが，内部計
算が 32 ビットである高速な計算システムをいかに活用するかを議論した．

標準固有値問題の固有対，特異値分解に関する反復改良法としては，強力な先行研究として
荻田・相島法がある．この荻田・相島法と行う計算の意味では等価な別の計算式を提案し，
高速な低精度演算をより多くの計算箇所にも適用できるアルゴリズムの開発を行った．

標準固有値問題については，浮動小数点数で厳密に表現できる固有値分解のファクタを設
定し，その行列に対して摂動を適宜加えることにより，行列積において誤差が発生しない
行列を生成できる手法の開発を行った．

4．研究成果

以下，項目ごとに研究成果をまとめる．

SuiteSparse Matrix Collection にある約 1700 の行列に対して，逆行列の最大値ノルムの
上限のデータを

https://www.mathsci.shibaura-it.ac.jp/ozaki/smc_norminf.html

に公表した．公開ページは図 1 のようになっており，可能な場合には「厳密な上限」，「浮動
小数点数として最適な上限」も示した．これらの行列を係数とした精度保証が高速に行える
ことを意味する．最大では 150 万の行列となり，大規模な行列の精度保証付き数値計算
が高速に実行できる．表示に誤差がないように 64 ビットのデータを 16 進数で記載して公
開している．これらのデータを活用して，疎行列を係数とする連立一次方程式を反復解法で
解くとき，近似解を得る手間の 2 倍未満で多くの場合に精度保証が行えることを示した．

SuiteSparse Matrix Collection					
Upper bound of norm(inv(A),inf)					
Matrix No.	File Name	Size	decimal	hex format	comments
					Coming soon
1421	G3_circuit	1585478	9.202379254209436e+02	408cc1e745716eb8	
2267	atmosmdl	1489752	2.000000007077924e+01	40340000012ffe98	
2268	atmosodm	1489752	1.000000000000476e-03	3f50624dd2f1b291	
2265	atmosodd	1270432	1.000000001437897e+01	40240000007b83b0	
2266	atmosodj	1270432	1.000000001437897e+01	40240000007b83b0	

図 1：逆行列の最大値ノルムの公開画面

疎行列向けのクリロフ部分空間法の高精度化に取り組んだ。反復解法では、残差ノルムが減少したとしても、誤差ノルムは一定のレベルで停滞してしまい、十分な精度の近似解が得られない問題が生じる。古典的な高精度化の手法としては、近似解の更新に用いる探索方向ベクトルをグループ化することで、丸め誤差の影響を抑制する「Groupwise 更新戦略」が知られていたが、悪条件な方程式に対しては、反復過程で深刻な情報落ちが発生し、必ずしも精度改善が達成されない。そこで我々は、効率よく情報落ちを回避するため、グループ化に多倍長演算を部分活用した混合精度型のアルゴリズムを新たに開発した。メモリ律速な倍々精度での実装において、計算時間をほとんど増大させることなく、大幅に近似解精度を向上させることに成功した。なお、誤差ノルムの評価については厳密性が重要となるが、研究代表者らが提唱している真の解が分かるテスト問題の生成法を活用することで、提案アルゴリズムの高い信頼性を示すことができた。以上の研究成果は、国際会議 JSST2022、日本応用数学会 2024 年研究部会連合発表会などで口頭発表を行うとともに、学術雑誌 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics への掲載に至った。

ここで数値実験例を紹介する。図 2 の赤線は通常の CG 法、緑線は Groupwise Update という手法を通常精度で実装、青線は Groupwise Update という手法を 10 回に 1 回だけ高精度計算を適用する手法（提案手法）である。提案手法は誤差の停滞を避けることができ、ほぼ最高精度の結果を得ることができた。

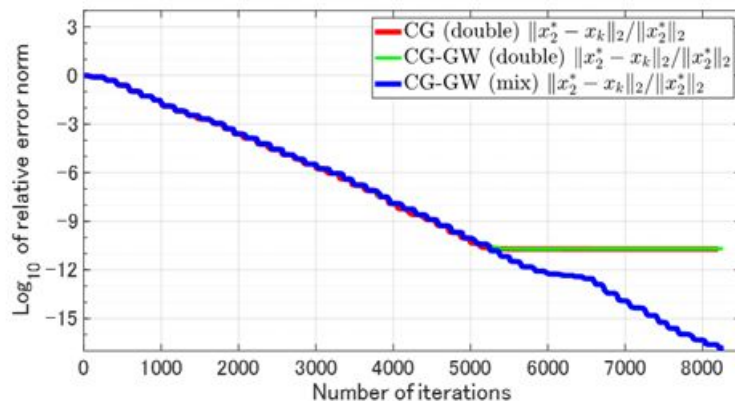


図 2：相対誤差の推移

関連するクリロフ部分空間法の研究として、収束振る舞いを滑らかにする残差スムージングを併用した場合の誤差ノルムの挙動解析とその改善、ランチョスの双直交化に基づく非対称行列向け反復解法の安定化に向けた取り組み、および global 型や block 型と呼ばれる拡張型クリロフ部分空間法の収束解析や高速化などの検討も行った。これらはまだ発展途上の段階ではあるが、いずれの研究も「誤差」に関する議論を含んでおり、前述の成果と合わせて、反復解法と精度保証法の融合に向けたある種の足掛かりになると考えられる。行列積の包含は精度保証付き数値計算では重要な計算である。本プロジェクトでは、3つの行列の積に比べて、同じ区間幅であればより高速性を追求し、同コストであればよりタイトな包含をできる新しい計算法を開発した。計算のポイントは、区間による拡大ははじめの点行列の積と次の点行列と区間行列の積で発生するが、はじめの点行列の積で過大評価を抑えるように設計したことである。その結果は一般化固有値問題に実際に適用し、高効率性を示すことができた。

固有値分解における固有対について、低精度で求めた計算結果を反復改良して高精度な計算結果を得る手法を開発した。近年開発された荻田・相島法と呼ばれる反復改良法に必要な計算コストを削減しつつ、収束は従来法と変わらない手法を開発できた。また、同様な方法

を特異値分解に対しても開発し，論文発表を行った．
行列積は多くの分野で基本として求められる計算であり，高速に高信頼な計算結果を得ることは重要である．特に AI などの分野では低精度計算の需要があり，より低精度な演算の高速化が求められている．特に入力低精度，出力高精度という Tensor Core を用いた計算が注目をされている．そこで浮動小数点数を入力として，高速な整数演算 Tensor Core を活用した行列積のアルゴリズムを開発した．INT8 Tensor Core は FP16 Tensor Core よりも 2 倍高速であること，行列の次元にある程度までは依存せずに 7 ビットの情報を保持できることを活かした高速・高精度アルゴリズムを開発できた．
標準固有値分解において，事前に厳密な固有値と固有ベクトルがわかるテスト行列の生成法を開発した．事前に固有値と固有ベクトルがわかることにより，数値計算結果の妥当性の検証，特に相対誤差を調べることも可能となる．ジョルダン標準形による固有値の指定，複素固有値を持つ実行列の生成など，幅広い問題を生成可能とする手法となった．

上記により，本科研費の課題の成果を十分に挙げられた．ご支援に感謝をいたします．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Ootomo Hiroyuki, Ozaki Katsuhisa, Yokota Rio	4. 巻 in press
2. 論文標題 DGEMM on integer matrix multiplication unit	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 The International Journal of High Performance Computing Applications	6. 最初と最後の頁 in press
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1177/10943420241239588	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Aihara Kensuke, Ozaki Katsuhisa, Mukunoki Daichi	4. 巻 41
2. 論文標題 Mixed-precision conjugate gradient algorithm using the groupwise update strategy	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 837 ~ 855
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-024-00644-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Uchino Yuki, Ozaki Katsuhisa, Terao Takeshi	4. 巻 10
2. 論文標題 Inclusion Methods for Multiplication of Three Point Matrices	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering	6. 最初と最後の頁 83 ~ 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15748/jasse.10.83	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Uchino Yuki, Terao Takeshi, Ozaki Katsuhisa	4. 巻 95
2. 論文標題 Acceleration of iterative refinement for singular value decomposition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Numerical Algorithms	6. 最初と最後の頁 979 ~ 1009
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11075-023-01596-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ozaki Katsuhisa, Ogita Takeshi	4. 巻 90
2. 論文標題 Generation of test matrices with specified eigenvalues using floating-point arithmetic	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Numerical Algorithms	6. 最初と最後の頁 241 ~ 262
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11075-021-01186-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Uchino Yuki, Ozaki Katsuhisa	4. 巻 8
2. 論文標題 Verified Numerical Computations for Searching for Vectors with the Maximum Sum	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering	6. 最初と最後の頁 53 ~ 72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15748/jasse.8.53	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 内野 佑基, 尾崎 克久, 荻田 武史	4. 巻 15
2. 論文標題 実対称固有値分解に対する反復改良法の高速化	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 情報処理学会論文誌, コンピューティングシステム	6. 最初と最後の頁 1 ~ 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 D. Mukunoki, T. Ogita	4. 巻 372
2. 論文標題 Performance and energy consumption of accurate >> and mixed-precision linear algebra kernels on GPUs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112701
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112701	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Minamihata, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi	4. 巻 369
2. 論文標題 Modified error bounds for approximate solutions of dense linear systems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of > Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112546
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112546	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Ogita, K. Aishima	4. 巻 369
2. 論文標題 Iterative refinement for singular value decomposition based on matrix multiplication	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112512
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112512	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計39件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 15件)

1. 発表者名 T. Ogita
2. 発表標題 Verified Solutions of Large Sparse Linear Systems Arising from 3D Poisson Equation
3. 学会等名 International Workshop on "Integration of Simulation/Data/Learning and Beyond (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 相原 研輔, 尾崎 克久, 椋木 大地
2. 発表標題 Groupwise更新戦略を用いた混合精度CG法の有効性
3. 学会等名 日本応用数理学会2024年研究部会連合発表会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 K. Ozaki
2. 発表標題 Tight enclosure of a matrix product based on BLAS
3. 学会等名 The 42nd JSST Annual International Conference on Simulation Technology (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 尾崎 克久, 寺尾 剛史, 内野 佑基
2. 発表標題 数値線形代数の諸問題に関するテスト行列の生成法の改良
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 相原 研輔
2. 発表標題 Lanczos型反復法における安定化多項式の発展と初期シャドウ残差の選択
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)新時代における高性能科学技術計算法の探究(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 K. Ozaki
2. 発表標題 GEMM-based numerical algorithm for accurate matrix multiplication
3. 学会等名 25th Conference of the International Linear Algebra Society (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Y. Uchino, K. Ozaki, T. Imamura
2. 発表標題 Acceleration of iterative refinement for symmetric eigenvalue decomposition with clustered eigenvalues
3. 学会等名 25th Conference of the International Linear Algebra Society (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 K. Ozaki
2. 発表標題 Recent Progress of BLAS-Based Accurate Numerical Algorithms for Matrix Multiplication
3. 学会等名 2023 Conference on Advanced Topics and Auto Tuning in High-Performance Scientific Computing (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 内野 佑基, 尾崎 克久
2. 発表標題 Level 3 BLASに対する尾崎スキームの設計
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 尾崎 克久
2. 発表標題 数値解の精度検証のためのテスト行列の生成法
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 新時代における高性能科学技術計算法の探究 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 山本 実央, 相原 研輔
2. 発表標題 連立一次方程式に対する可変的前処理付きglobal CG法の収束性
3. 学会等名 第21回計算数学研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Arisa Kawase, Kensuke Aihara
2. 発表標題 Numerical studies on preconditioned iterative solvers with minimal residual smoothing
3. 学会等名 The 42nd JSST Annual International Conference on Simulation Technology (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 内野 佑基, 尾崎 克久, 寺尾 剛史
2. 発表標題 3つの点行列の積の包含法とその解析について
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 尾崎 克久, 椋木 大地, 荻田 武史
2. 発表標題 不等分割による行列積のエラーフリー変換の高精度計算への応用
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 萩田 武史
2. 発表標題 高性能かつ高信頼な数値計算手法とその応用
3. 学会等名 第14回JHPCNシンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 相原 研輔, 尾崎 克久, 椋木 大地
2. 発表標題 Flying restart付きCG法に対する混合精度演算による近似解精度の向上
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 内野 佑基, 尾崎 克久, 寺尾 剛史
2. 発表標題 特異値分解に対する反復改良法の高速度化
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 寺尾 剛史, 内野 佑基, 尾崎 克久, 今村 俊幸
2. 発表標題 実行列の全特異値に対する効率的な精度保証法
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 尾崎 克久, 棕木 大地, 荻田 武史
2. 発表標題 行列積に対する試行型エラーフリー変換に対する誤差の対処法とその応用
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kensuke Aihara, Katsuhisa Ozaki, Daichi Mukunoki
2. 発表標題 A mixed-precision algorithm of the CG method using the group-wise update strategy
3. 学会等名 The 41st JSST Annual International Conference on Simulation Technology (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 尾崎 克久
2. 発表標題 精度保証付き数値計算の数値再現性への貢献について
3. 学会等名 日本応用数理学会「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会 第32回研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 尾崎 克久
2. 発表標題 行列積のエラーフリー変換に関する基礎・応用とMATLABコード生成のチュートリアル
3. 学会等名 第5回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内野 佑基, 尾崎 克久, 荻田 武史
2. 発表標題 実対称固有値分解に対する反復改良法の高速度化
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺尾 剛史, 尾崎 克久, 今村 俊幸
2. 発表標題 2ステップ型反復改良法を用いた連立1次方程式の高精度計算法
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 尾崎 克久
2. 発表標題 行列積に対するエラーフリー変換の多倍長精度計算への応用について
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 尾崎 克久, 荻田 武史, 椋木 大地
2. 発表標題 高速かつ高精度な行列積計算を用いた固有値と特異値の計算法
3. 学会等名 2021年並列 / 分散 / 協調処理に関するサマー・ワークショップ (SWoPP2021)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 寺尾 剛史, 尾崎 克久, 今村 俊幸
2. 発表標題 低精度計算を活用した線形方程式に対する残差反復法の改良
3. 学会等名 2021年並列 / 分散 / 協調処理に関するサマー・ワークショップ (SWoPP2021)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Ozaki, D. Mukunoki, T. Ogita
2. 発表標題 Rayleigh quotient and accurate matrix multiplication for eigenvalue problems
3. 学会等名 International Workshop on Reliable Computing and Computer-Assisted Proofs (ReCAP 2022) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 K. Ozaki
2. 発表標題 Error-free transformation of matrix multiplication for multi-precision computations
3. 学会等名 The 19th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations (SCAN2020) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Y. Uchino, K. Ozaki, T. Ogita
2. 発表標題 Acceleration of Iterative Refinement for Symmetric Eigenvalue Decomposition
3. 学会等名 The 40th JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST2021) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Terao, K. Ozaki, T. Ogita, T. Imamura
2. 発表標題 Verified Numerical Computations for a Standard Eigenvalue Problem Without Directed Rounding
3. 学会等名 The 40th JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST2021) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Ozaki, D. Mukunoki, T. Ogita
2. 発表標題 Acceleration of Error-Free Transformation of Matrix Multiplication using GPU Tensor Cores
3. 学会等名 The 40th JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST2021) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Ozaki, T. Ogita, D. Mukunoki
2. 発表標題 Interval Matrix Multiplication Using Fast Low-Precision Arithmetic on GPU
3. 学会等名 The theme of the 9th International Workshop on Reliable Engineering Computing (REC2021) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Nakajima, T. Ogita, M. Kawai
2. 発表標題 Efficient Parallel Multigrid Methods on Manycore Clusters with Double/Single Precision Computing
3. 学会等名 2021 IEEE International Parallel and Distributed >> Processing Symposium Workshops (IPDPSW) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Ogita
2. 発表標題 Iterative Refinement and Verified Numerical Linear Algebra
3. 学会等名 SIAM Conference on Applied Linear Algebra (LA21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 尾崎 克久, 荻田 武史
2. 発表標題 疎行列に対する逆行列のノルムデータとその活用法
3. 学会等名 日本応用数理学会第17回研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 尾崎 克久, 荻田 武史
2. 発表標題 エラーフリー変換を用いた悪条件行列の生成法
3. 学会等名 日本応用数理学会第17回研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 尾崎 克久, 荻田 武史, 棕木 大地
2. 発表標題 高精度行列積を用いて固有ベクトル行列から固有値を計算する方法について
3. 学会等名 「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会 第30回研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 尾崎 克久, 棕木 大地, 荻田武史
2. 発表標題 GPUの単精度演算・Tensorコアを用いた行列積のエラーフリー変換
3. 学会等名 日本応用数理学会年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

行列の逆行列の最大値ノルムの上界 https://www.mathsci.shibaura-it.ac.jp/ozaki/smc_norminf.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	荻田 武史 (Ogita Takeshi) (00339615)	東京女子大学・現代教養学部・教授 (32652)	
研究分担者	相原 研輔 (Aihara Kensuke) (70735498)	東京都市大学・情報工学部・准教授 (32678)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------