

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K00010

研究課題名(和文)連続体と集合論の数理と哲理

研究課題名(英文) Mathematics and Philosophy of Set Theory of the Continuum

研究代表者

藤田 博司 (Fujita, Hiroshi)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・講師

研究者番号：60238582

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：位相数学の基礎概念を概説した書籍『位相空間のはなし』(日本評論社)を藤田が2022年7月に上梓した。藤田は雑誌『数理科学』2022年7月号に位相空間の距離づけ理論を概説した記事「距離空間と距離化定理」を執筆した。菊池・池田・藤田は、雑誌『数学セミナー』2023年6月号に実数と連続体に関連した記事を執筆した。2023年度には公理的集合論の研究集会「巨大基数と連続体」を開催した。(2023/10/24-27, 京都大学数理解析研究所)。これまでの研究成果をもとに共同討議する機会として「第2回ロジック・ウィンタースクール」(2023/12/26-29, 愛媛県松山市)を開催した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学基礎論の従来の理解を問い直す作業を進めた。研究代表者および3名の研究分担者(池田・菊池・黒川)がそれぞれに文献の検討を行った。そのさい、以下に述べる課題を重点的に検討した。(1)ニュートンとライプニッツの無限小解析およびその哲学的批判者たちの議論の検討(池田)、(2)集合論における連続体問題研究の現状分析とその哲学的評価(藤田)、(3)現代の数学基礎論において連続体の論理的代替物として研究されている2階の自然数論および実閉順序体の理論の現状分析(菊池)、(4)証明や計算、構成といった概念の数学的定式化についての論理的・哲学的考察(菊池・黒川)。研究成果は出版物および研究集会で発表した。

研究成果の概要(英文)：Fujita published a book on basic concepts concerning topological spaces. Fujita wrote an article about metric spaces and metrisation theorems on a Japanese magazine "Suuri-Kagaku" (July 2022). Ikeda, Kikuchi, and Fujita wrote articles about the reals numbers and continuum on a Japanese magazine "Sugaku-Seminar" (June 2023). In the year 2023, Fujita held, as the organizer, an international conference on Set Theory under the title "Large Cardinals and the Continuum", at RIMS Kyoto University (October 24-27, 2023). Fujita organized the 2nd Logic Winter School at Matsuyama city (December 26-29, 2023).

研究分野：記述集合論

キーワード：連続体問題 連続体の哲学 数理哲学史 数理論理学 公理的集合論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

カントールの連続体問題とは、実数全体の集合の濃度(連続体濃度)が無限集合の濃度全体の中でどのように位置づけられるかを問うものである。カントール自身は連続体濃度を最小の不可算濃度であると予想した。これをカントールの連続体仮説というが、周知のとおり、連続体仮説は集合論の通常の公理系と独立である。1938年にゲーデルが無矛盾性を示し、1963年にコーエンが独立性を証明して以来、連続体の数学的研究はその面目を一新し、現在に至るまで、ゲーデルの内部モデルの方法、コーエンの強制の方法をそれぞれ整理・拡張することを通じて、独自の発展を続けている。たとえば、PFAやMMといった強制法公理の連続体濃度に与える影響が明らかになり、また、ウッデンが集合論における論理と証明の概念を著しく拡張した「ロジックの方法」、ゲーデルの内部モデルの方法と超コンパクト基数という巨大基数の理論を組み合わせたUltimate-Lの理論で、連続体問題を攻略しようとしている。ただし、各種の強制法公理やウッデンの理論において提出されたさまざまな仮説が、集合論の公理としていかなる位置づけを得るか、また、それらの新しい仮説が描きだす集合の宇宙がどのような様相を呈するか、議論が尽くされたとは言いがたい現状である。

いっぽう、いわゆる実数の集合論という研究領域において、連続体の構造の数学的研究において集合論の通常の公理系と独立なさまざまな命題が林立し、それらがいわゆる「通常の数学」への応用をほとんど持たない現状は、集合論における独立性証明の方法を中心とする連続体問題研究と、ほぼ全面的に通常の集合論の公理系の枠内で定式化が可能な「通常の数学」の研究との間に、方法的あるいは認識論的な乖離が存在することを示唆する。

また、連続体問題の数学的研究によって明らかになった連続体をめぐる数学の思いがけぬ複雑さを考えるとき、この複雑さは、古代ギリシア以来の自然哲学や形而上学の研究対象であった「連続」の観念の理論的に不可避な帰結なのか、あるいは、実数の連続性に対する近代的な定式化の特殊事情というべきものなのかという疑問が生じる。

本研究は、これらの疑問に数理と哲学の両面からアプローチを試みるものである。

2. 研究の目的

連続概念の研究の哲学的概観と数学史の概観を通じて、現在の集合論における連続体問題研究の歴史的な立ち位置を明らかにし、次いで、集合論における連続体問題研究の現状を概観し哲学的な観点から評価する。また、連続という観念が本来もっているはずの感覚的・直観的な意味内容を検討するため、連続性の直観的認識の源泉のひとつとしての空間や時間の構造の研究成果を取り込み、連続体の数学的定式化の意義の再検討の手掛かりとする。そのさい、そもそも時空の連続性という観念自体が、量子論や重力理論といった基礎物理学の最近の知見により解体される可能性も視野に入れる。

3. 研究の方法

以下のような研究活動を行なった。

ニュートンとライプニッツの無限小解析、および、その哲学的批判者たちの議論の検討(池田)

集合論における連続体問題研究の現状の分析とその哲学的評価(藤田)

現代の数学基礎論において連続体の論理的代替物として研究されている2階の自然数論および実閉順序体の理論の現状の分析(菊池)

ハレット[M.Hallett1984]が示唆するようなカントールの思想のライプニッツの哲学やキリスト教神学との親和性の再評価(池田・藤田)

証明や計算、構成といった概念の数学的定式化についての論理的および哲学的考察(菊池・黒川)

4. 研究成果

本研究では、数学基礎論の従来を理解を問いなおす作業を進めた。まず、研究代表者および3名の研究分担者(池田・菊池・黒川)がそれぞれに文献の検討をおこなった。2021年度には以下のテーマを中心に研究が行なわれた。(1)ニュートンとライプニッツの無限小解析、および、その哲学的批判者たちの議論の検討(池田)(2)集合論における連続体問題研究の現状の分析とその哲学的評価(藤田)(3)現代の数学基礎論において連続体の論理的代替物として研究されている2

階の自然数論および実閉順序体の理論の現状の分析(菊池)(4)証明や計算、構成といった概念の数学的定式化についての論理的および哲学的考察(菊池・黒川)

2022 年前半までの実績をまとめたものとして、位相数学の基礎概念を概説した書籍『位相空間のはなし』(日本評論社)を藤田が 2022 年 7 月に出版した。この書籍においては、位相数学の諸概念をあえてアイデア的なものと位置づけ、図形的・直観的なイメージの世界と抽象的な論理の世界の往還をテーマとして解説している。また、藤田は、雑誌『数理科学』2022 年 7 月号に、位相空間の距離づけ理論を概説した記事「距離空間と距離化定理」を執筆した。

藤田・菊池・池田は、雑誌『数 学セミナー』に実数と連続体に関連した記事をそれぞれ執筆し、これらは 2023 年 6 月号に掲載された。研究計画の最終年度である 2023 年度には、公理的集合論の研究の最先端の状況を議論する研究集会「巨大基数と連続体」(2023/10/24-27, 京都大学数理解析研究所)を開催した。また、これまでの研究成果をもとに 共同討議する機会として「第 2 回ロジック・ウィンタースクール」(2023/12/26-29, 愛媛県松山市)を開催した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 藤田博司	4. 巻 60
2. 論文標題 距離空間と距離化定理	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 19-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 池田真治	4. 巻 49(8)
2. 論文標題 ライプニッツは二進法にいかなる有用性を見たのか？ 二進法の起源と価値をめぐって	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 現代思想	6. 最初と最後の頁 185-198
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 藤田 博司
2. 発表標題 hyperdegreeのminimal coverについて
3. 学会等名 早稲田大学集合論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田博司
2. 発表標題 実効記述集合論
3. 学会等名 ロジック・ウィンタースクール2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤田 博司
2. 発表標題 超限順序数と連続体問題
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 藤田 博司	4. 発行年 2022年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 256
3. 書名 位相空間のはなし	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	黒川 英徳 (Kurokawa Hidenori) (30710230)	金沢大学・GS教育系・准教授 (13301)	
研究分担者	菊池 誠 (Kikuchi Makoto) (60273801)	神戸大学・システム情報学研究科・教授 (14501)	
研究分担者	池田 真治 (Ikeda Shinji) (70634012)	富山大学・学術研究部人文科学系・准教授 (13201)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------