

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：14201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K02855

研究課題名(和文) 中高一貫教材を用いた「証明すること」を核とする授業の構成原理に関する研究

研究課題名(英文) Study on the mathematics lesson with proving: with teaching materials for the students 13-18 years old based on the coherent understanding

研究代表者

渡邊 慶子(向井慶子)(Watanabe-Mukai, Keiko)

滋賀大学・教育学系・准教授

研究者番号：00572059

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究成果は、大きく2つである。

一つは、中学3年生の証明教材において「場合分けのある証明」の重要性とその授業の構成原理を明らかにした点である。証明をいくつかの定理や性質を組み合わせた陳述と捉えるのではなく、1つの一貫した流れのある陳述として捉え、場合ごとの証明の表記と意味を相互に関わらせていくことによって、証明の仮定を深く理解することができることを明らかにした。もう一つは、一つの定理に対して証明は多様にできることを生かした授業の構成原理を明らかにした点である。一つの定理の多様な証明を部分と全体の視点で比較することによって、証明を介して数学的探究をする授業の原理を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、数学を探究するための方法としての証明の位置づけを理論的にも実践的にも明確にすることに貢献すると考える。中学2年生で基礎的な証明を学習した後、証明の仕組みへの理解をいかに高め、証明を数学を学ぶための道具とできるのかをテーマとして、特に中学3年生から高等学校数学への架け橋となるような数学科授業の具体的な教材を開発したり、授業の展開をどのようにすべきかなどの授業構成原理を提案することができた。

研究成果の概要(英文)：There are two major results of this research.

The first is the clarification of the importance of "proof with cases" in the teaching of proofs for third graders in junior high school, and the principles for structuring such lessons. Specifically, the following two points were clarified: 1) Proofs should not be regarded as statements combining several theorems and properties, but as a single coherent statement; 2) By interrelating the notation and meaning of proofs for each case, the assumptions of the theorem can be deeply understood.

The second is that we have clarified the principle of structuring a lesson that takes into account the fact that there can be various proofs for a single theorem. By comparing various proofs of a theorem from the viewpoints of the part and the whole, we have derived the principle of a lesson in which mathematical inquiry is conducted through proofs.

研究分野：数学教育学

キーワード：証明 中高一貫 授業構成原理

### 1. 研究開始当初の背景

現在、国際的な教育動向の一つである「STEM 教育」に関連して、数学的な「創造力・構造力」や「判断力」の育成が求められている。創造力・判断力は、「IT 社会とグローバル社会に適応した国際競争力を持った人材の育成」に必須の能力と国際的に認められている。特に数学領域では、単なる「計算処理能力」の育成にとどまらない教育のあり方を改めて議論している。特に、数学的現象の前提を整理し、その現象理解のプロセスを論理的に説明できる能力の育成は喫緊の課題であり、その代表的な具体策が「大学入学共通テスト」に記述式問題を導入することや、理数探究科目を新設することなどの教育改革であろうと考えられる。

このような教育改革に対し、本研究は、「数学的に理解を深め、数学的な創造力・構造力や判断力を発揮する」ための数学的活動の一つとして「証明すること」を捉え、「証明すること」を核とした授業の実施が必要であることを主張するものである。

さらに、このような教育改革に関連して、学校現場で日々行われる授業、それを作り上げている教師の指導理念に対しても変化が求められる。特に、先の教育改革に際し、中学校・高等学校の数学科（以下、中高数学科）の授業の作られ方や研究方法の見直しは急務である。「義務教育か否か」の枠を超えて議論される中で、中学数学と高校数学を接続する教育（以下、中高一貫教育）を念頭にした教材の開発、更には、その教材を用いた授業を構成するための原理に関する理論や実践については、「小中接続」の研究に比べて研究の余地が多く残されている。連携校・協力校を含む中高一貫学校が増加傾向にある一方で、いわゆる「高1ギャップ」の時期に生徒たちの「数学離れ」が加速する昨今、中高の学習内容と学習方法の不連続さは予てより問題視されてきた（澤木ほか、2001；北村、2009）。

このような中高一貫教育の課題に際し、本研究は、「証明すること」を核とする中高一貫する教材の開発とその教材を用いた授業を構成する前提・条件（以下、授業構成原理）の導出し、それに基づいて中高数学科の授業改善を目指したい。数学教育においては、証明の仕組みを一通り学習した後、中学3年生から高校数学 IA の履修にかけて、定義や定理、補題、そして、間接証明（主に背理法）や直接証明を意識して数学をし始める。この時期は、「意識的、主体的に論理にこだわって数学する」初めの段階といえるだろう。本研究では、この学習段階で「証明する」という数学的活動を多方面から問い直すことが、数学的な「創造力・構造力」や数学的アイデアの適用を見極める「判断力」を高めると考えている。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、「証明すること」を核にした中・高等学校を一貫する数学科教材を開発し、その教材を用いた授業の構成原理を明らかにすることであった。「証明すること」を介して数学的現象の理解を拡張・深化させることは、中・高等学校において数学的な創造力・構造力や判断力を高める一つの具体策と考える。本研究では、中高の学習内容を接続する教材を開発し、特に、定理になされた複数の証明を比較・検討する場面を含む授業を構成して実施した。加えて、その授業を質的分析法で検討して構成原理を導出した。

### 3. 研究の方法

本研究では、研究課題を次の3つとして、研究を進めた：

課題1 多様な証明の比較が及ぼす学習効果の理論的検討と指導方法の明確化

課題2 「証明すること」を核とした実験授業の実施と分析

課題3 「証明すること」を核とした授業の「物語一貫性」を視座とした分析と構成原理の導出、研究の総括

### 4. 研究成果

本研究成果は、大きく2つである。

一つは、中学3年生の証明教材において「場合分けのある証明」の重要性とその授業の構成原理を明らかにした点である（渡邊・岡崎、2021）。証明をいくつかの定理や性質を組み合わせた陳述と捉えるのではなく、1つの一貫した流れのある陳述として捉え、場合ごとの証明の表記と意味を相互に関わらせていくことによって、証明の仮定を深く理解することができることを明らかにした。具体的には、定理の意味の理解と証明活動の相互関係に着目し、生徒が定理の理解を証明につなげていくプロセス、及び証明活動を見直して定理を再認識するプロセスを分析して、証明の概念を形成していくプロセスや要因を明らかにした。この際、本研究では、場合分けのある証明に着目し、「円周角の定理の証明」（図1）を検討した。

特に、理論的考察の結果、証明言語の生成と振り返りによる定理(Theorems)と証明(Proofs)の相互理解を捉える視点として、次の3点が挙げられることを提案した：

【TP1】プラグマティズムに立脚した証明の概念形成

定理の理解と証明の構成は相互的な関係にある。証明は図的現象の理解と無関係に構成されず、

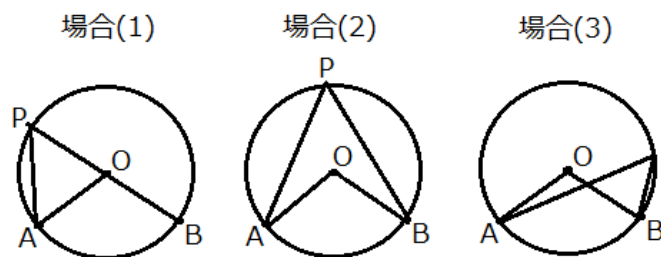


図1 円周角の定理の場合分け（渡邊・岡崎，2021，p.37）

証明の構成の前に定理は直観的・帰納的にひとまず理解される。定理の直観的または帰納的で暫定的な理解に基づいて証明が構成されるが、逆に、証明に基づいて暫定的だった定理の理解が見直される。構成された証明を振り返って定理の理解が適切だったかどうかを探り、定理の適用範囲の境界を明確化する活動こそ、証明することを介して証明の概念形成を育むことになる。

【TP2】定理と証明の相互理解を捉える証明言語

証明の構成に影響した定理の見方は、証明言語としての図や記述に表されており、証明の構成を進める証明言語はある数学性に基づく定理の見方として証明に反映される。その際、証明言語として図や記述が証明の構成における「生成例」の役割を果たす。

【TP3】全体論的視点からの証明の再考

証明を一応完成させてそれを見直す際、証明を全体論的にみることが証明の部分を見直すことになり、証明後に定理の意味を見直す。

もう一つ、一つの定理に対して証明は多様にできることを生かした授業の構成原理を明らかにしたことである（渡邊・小山，2023）。一つの定理の多様な証明を部分と全体の視点で比較することによって、証明を介して数学的探究をする授業の原理を導出した。具体的には、1つの定理に対する多様な証明を生かした相互作用を分析する視点を設定することである。本稿では、数学授業で生じる証明の多様性を生かした相互作用の視点として、Voigt(1995)による2つの視点「相互作用のパターン」と「相互作用におけるテーマ的パターン」を援用し、前者に「比較パターン」と「議論パターン」の2つ、後者に「証明の方法」と「証明の構造」の2つを設定して視点の枠組みを提案した。その枠組みを用いて、中学3年の1つの証明問題を取り扱った授業実践を分析した。その結果( )多様な証明を生かした複雑な相互作用を比較パターンと議論パターンに区別して分析できること、( )相互作用におけるテーマ的パターンを証明の方法と構造に区別して分析することで、生徒たちがどのように証明を理解していくのか、別の証明をどのように生成していくのかを記述できることが明らかになった。

上記の2つの研究成果より、「課題1 多様な証明の比較が及ぼす学習効果の理論的検討と指導方法の明確化」ならびに「課題2 「証明すること」を核とした実験授業の実施と分析」を行うとともに、「場合分けのある証明の授業」と「一つの定理に対する多様な証明に関する相互作用を実現する授業」についてそれぞれの構成原理を導出することができた。

一方で、「課題3 『証明すること』を核とした授業の「物語的な一貫性」を視座とした分析と構成原理の導出」に関しては、課題が残された。

本研究の成果と残された課題を踏まえて、今後、証明を伴う相互作用を捉える視点を明らかにすることをねらいとした研究を進めていく予定である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 渡邊慶子・小山正孝	4. 巻 46
2. 論文標題 数学の授業における証明の多様性を生かした相互作用を分析するための視点	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 日本教科教育学会誌	6. 最初と最後の頁 1, 11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子	4. 巻 10
2. 論文標題 「空間-平面」の相互理解としての空間図形における証明の生成過程	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本数学教育学会「第10回春期研究発表大会論文集」	6. 最初と最後の頁 199, 206
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子・小山正孝	4. 巻 55
2. 論文標題 数学学習における「追証明」に関する研究 - 証明活動を自己参照する過程に着目して -	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本数学教育学会「第55回秋期研究発表大会発表集録」	6. 最初と最後の頁 25, 32
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子	4. 巻 11
2. 論文標題 証明の生成を通して幾何的現象の理解を補完・修正する活動	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 日本数学教育学会「第11回春期研究発表大会論文集」	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子・岡崎正和	4. 巻 27(1)
2. 論文標題 証明言語の生成とふり返りによる定理と証明の相互理解 場合分けのある証明に着目して	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 全国数学教育学会誌「数学教育学研究」	6. 最初と最後の頁 33, 46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子	4. 巻 9
2. 論文標題 空間図形における証明の意義に関する考察 - 三垂線の定理の証明による検討を通して -	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 日本数学教育学会「第9回春期研究発表大会論文集」	6. 最初と最後の頁 161, 168
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masakazu Okazaki, Keiko Watanabe	4. 巻 3
2. 論文標題 Enhancing the Level of Geometric Thinking Through Learning the Inscribed Angle Theorem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.	6. 最初と最後の頁 420-430
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子	4. 巻 1
2. 論文標題 証明の多様性を生かした相互作用を捉える視点 - Voigt(1995)によるテーマ的パターンの相互作用に着目して -	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 日本数学教育学会「第54回秋期研究大会発表集録」	6. 最初と最後の頁 369, 372
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子	4. 巻 1
2. 論文標題 「数学教室」における空間図形に関する論文の考察 教材・教具に焦点を当てて	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 日本数学教育学会第8回春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 121,128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子	4. 巻 1
2. 論文標題 空間図形における証明の意義に関する考察 - 三垂線の定理の証明による検討を通して -	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 第9回春期研究発表大会論文集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 渡邊慶子
2. 発表標題 「空間-平面」の相互理解としての空間図形における証明の生成過程
3. 学会等名 日本数学教育学会「第10回春期研究発表大会」（Online: 宇都宮大学）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊慶子・小山正孝
2. 発表標題 数学学習における「追証明」に関する研究 - 証明活動を自己参照する過程に着目して -
3. 学会等名 日本数学教育学会「第55回秋期研究発表大会」。(Online: 福岡教育大学)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊慶子
2. 発表標題 証明の生成を通して幾何的現象の理解を補完・修正する活動
3. 学会等名 日本数学教育学会第11回春期研究発表大会。(宮城教育大学)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊慶子
2. 発表標題 空間図形における証明の意義に関する考察 - 三垂線の定理の証明による検討を通して -
3. 学会等名 日本数学教育学会「第9回春期研究発表大会」(Online: 山梨大学)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masakazu Okazaki, Keiko Watanabe
2. 発表標題 Enhancing the Level of Geometric Thinking Though Learning the Inscribed Angle Theorem
3. 学会等名 the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 渡邊慶子
2. 発表標題 証明の多様性を生かした相互作用を捉える視点 - Voigt (1995)によるテーマ的パターンの相互作用に着目して -
3. 学会等名 日本数学教育学会「第54回秋期研究大会」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 渡邊慶子
2. 発表標題 「数学教室」における空間図形に関する論文の考察 教材・教具に焦点を当てて
3. 学会等名 日本数学教育学会第8回春期研究大会論文集
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡邊慶子
2. 発表標題 空間図形における証明の意義に関する考察 - 三垂線の定理の証明による検討を通して -
3. 学会等名 日本数学教育学会第9回春期研究大会論文集
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education	開催年 2021年～2021年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関