

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：13902
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2020～2022
 課題番号：20K02909
 研究課題名(和文) インフォーマルな表現からプリフォーマルな表現への移行を促す割合指導に関する研究

研究課題名(英文) Research on instruction of rate and proportion to foster the transition from informal to pre-formal expressions

研究代表者
 山田 篤史(YAMADA, Atsushi)
 愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：20273823
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、正式な割合指導に先立ち児童が持ち得る割合に関わるインフォーマルな表現を調査し、そこからプリフォーマルな数学的表現使用への移行を促す指導について検討することを目的としている。

調査に基づき、a)「関係図」のかき方と を使った式による立式、b)問題文の言い換え、c)関係図の構成法・代替としてのジェスチャー、d)インフォーマルな表現によるテープ図解釈の補完、という4つの指導をデザインし、割合指導の直前から児童が好む表現を使いつつ指導を行ったところ、事後調査では、全国学テ問題での正答率の高さや、多くの児童がジェスチャーを併用して正確な関係図をかくことができているという結果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

割合学習の困難は長年にわたり指摘されており、その学習を促す様々なプリフォーマルな表現(例えば、関係図)に基づく割合指導の研究は盛んである。しかし、そうしたプリフォーマルな表現の使用・解釈にも困難があるというのが児童の実態である。本研究は、プリフォーマルな表現の解釈・使用を下支えしうるインフォーマルな表現に着目しているが、そうした研究は少なく、学術的意義は少ない。また、インフォーマルな表現からプリフォーマルな表現使用への移行を促すと考えられる4つの指導をデザインし、一定程度の効果も確認できたため、学術的にも社会的にも意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)： The purpose of this study is to investigate informal expressions related to rate and proportion that students may have prior to formal instruction of rate and proportion, and to examine the instruction that foster the transition from informal expressions to the use of preformal mathematical expressions.

Based on the investigation, four types of instruction as follows are designed : a) how to draw a "relationship diagram" and making a mathematical expression with , b) rephrasing problem statements, c) gesture as an alternative of relationship diagram and as a mnemonic of how to construct it, and d) using an informal expression to complement the interpretation of tape diagrams.

The results of the post-test showed a high percentage of correct answers to the national test problems and that many children were able to draw accurate relationship diagram using gestures.

研究分野：数学教育学

キーワード：プリフォーマルな表現 インフォーマルな表現 割合指導

1. 研究開始当初の背景

割合概念の困難性は長年にわたり指摘されてきているが、その困難の一つとして、割合関連の指導で導入される関係図や比例数直線等の表現の理解・利用の困難性があるとされている。

数学的概念の理解と問題解決におけるその適切な利用は、数学的表現に支えられている面があるため、教科書等で利用が推奨されているこうした表現を促しつつ指導を進めることは重要である。というのも、算数の指導では、学習者は、未習内容を含む問題に対して最初から問題構造を完璧に反映した式表現や言語表現(教師が最終形として望むフォーマルな数学的表現)を構成できることが期待されているわけではなく、学習者が独自に構成するインフォーマルな表現を出発点とし、如何にそれらをフォーマルな数学的表現へと繋げて、問題解決と授業の進展を図っていくかが重要なプロセスになるからである。そして、学習者が独自に構成するインフォーマルな表現を出発点とする場合、それらを教師が最終形として望むフォーマルな数学的表現へと「直接」結びつけることは難しいことが多いため、両者を媒介する様々な中間的表現(例えば、関係図や比例数直線の類)を用いるのが通常である。

こうした「児童生徒のインフォーマルな表現に基盤を置くが、より大きな数学的構造を提供しつつ、フォーマルな表現を意味論的に支える媒介的な表現」は、プリフォーマル(Pre-Formal)な表現と呼ばれることがある(例えば、Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008)。例えば、割合概念の一部を支える $\frac{3}{4}$ のような分数表現はフォーマルな表現だが、それらは最初から多様な意味・表現と結びつけられ、意味論的に豊かな表現として獲得されるわけではない。それらは先ず、特定の問題解決の文脈に依存した児童の様々なインフォーマルな表現(例えば、児童が描く絵など)との結びつきが強いものであり、指導の中で徐々に関係図や比例数直線等の様々なプリフォーマルな表現と結びつけられ、より汎用性の高いフォーマルな表現($\frac{3}{4}$)の問題解決に果たす役割が理解されることで、意味論的に豊かで堅固なものになっていくと考えられるのである。

こうしたインフォーマル、プリフォーマル、フォーマルという表現の3層構造は、Webb 他(2008)によって、フォーマルな表現を支える「冰山モデル」として説明されてきたものだが、このモデルにおいて、比例数直線をプリフォーマルな表現として位置付けて見てみると、具体的な研究課題が浮かび上がってくる。

先ず、冒頭で指摘した関係図や比例数直線のような表現に対する理解や利用の困難さの原因としては、それを支えるインフォーマルな表現が欠如していることが指摘できる。児童の割合概念を支えているインフォーマルな表現やアイデアを掘り起こすことなく、プリフォーマルな表現を天狗的に与え、その解釈を児童に強いるような割合指導であれば、先の困難も納得できる。しかし、関係図や比例数直線のようなプリフォーマルな表現を支えるようなインフォーマルな表現にはどのようなものが有り得るか、またその素地指導としてどのような活動・指導を想定しうるかは、表現研究の立場から十分な調査・検討がなされているとは言い難い状況だったのである。さらに、そうした調査や検討を経て明らかにされたインフォーマルな表現からプリフォーマルな表現への移行を促す指導の在り方の検討も十分になされているものとは言い難く、この点も重要な研究課題と考えられた。

(文献)

Webb, D.C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (2), 110-113.

2. 研究の目的

上記のような課題意識を踏まえて、本研究では、正式な割合指導に先だって児童が持ち得る様々な割合に関わるインフォーマルな表現を調査し、そうしたインフォーマルな表現を構成・解釈できるような割合の素地指導を事例的にデザインすると共に、最終的には、それらの調査・考察等を踏まえて、割合に関わるインフォーマルな表現からプリフォーマルな表現への移行を促す指導の在り方について検討することを目的とすることにした。

3. 研究の方法

割合指導で導入される関係図・比例数直線のようなプリフォーマルな表現を支える児童のインフォーマルな表現を調査することに関しては、割合概念に関わる指導(割合、単位量当たりの大きさ、倍を表す小数・分数など)の研究、商業誌における指導記録、教科書をレビューし、事例を収集していくことにした。なお、我が国では、割合・比例・比は異なる単元で扱われ、指導の文脈でも異なる形・表現で扱われる。しかし、概念的には同種の概念であるため、国外の研究では同じ文脈で扱われる傾向にある。そのため、研究に関しては国外のものを射程に入れる必要があると考えられた。

次に、そうしたインフォーマルな表現を構成し得る割合の素地指導・活動を事例的にデザインすることに関しては、上記のレビューと児童の実態調査に基づき、現場の教師のアドバイスも取り入れつつ探索的に行っていくことにした。

最終的に、割合に関わるインフォーマルな表現からプリフォーマルな表現への移行を促す指導の検討に関しては、先にデザインした指導・活動を教室で行い、その授業を分析したり、その

効果について分析・検証したりして、検討を加えていくことにした。

4. 研究成果

(1) 2020年度は、正式な割合指導に先だって児童が持ち得る割合に関わるインフォーマルな表現に関して、文献的に調査した。中でも、Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO)の研究活動報告(*Educational Studies in Mathematics*, 7(3) 特集号)における低学年の「比」の指導事例に注目し、比・比例・割合の概念形成の素地的活動と目され、我が国でも直ぐに教材化できそうな2つの事例について検討し、その結果を『イブシロン』誌第62巻にまとめた(「5. 主な発表論文」〔雑誌論文〕参照のこと)。

事例の1つ目は、低学年においてOHPを使った相似拡大の場面から始まる一連の活動の中で取り上げられた問題で、紙面上の複数の事物の長さのうち1つの事物の長さしか与えられていない所から、他の事物が元の「何倍かを考え、他の長さを考える」という活動である。これらは、相似拡大が成立している写真などを問題場面として利用し、その写真内の特定のものの長さを、別のよく分かっている(あるいは見積もり可能な)ものの長さとして、写真上のそれら2つの長さの倍関係を利用して求めるという活動に活用可能であり、4・5年生の倍の見方の素地となる活動として有望であることが示唆された。

また、もう1つの事例は、「帯図・影のモデル・タイルパターンといった汎用性のある幾何学的表現」を使って問題解決を行う活動である。特に、単純な計数によって全体に対する部分の割合の計算ができるタイルパターンを、我が国ではプリフォーマルな表現として導入されがちな連続的な帯図に関連付ける活動は、割合指導における有望な素地指導であることが示唆された。

(2) 2021年度は、教科書に従った正式な第5学年での割合指導がなされる前に、あるクラスの児童に対する実態調査として、1)「黒のテープの長さは白のテープの長さの3倍」と「黒のおもりの重さは白のおもりの重さの3倍」が表す状況について絵・図・言葉・式などを使って説明してもらった自由記述の問題(児童が倍や割合の概念に対して持っているインフォーマルな表現の調査)、2)平成28年度全国学力・学習状況調査算数A[8]問題、3)平成24年度全国学力・学習状況調査算数A[3]問題(いずれも教科書に提示されがちなプリフォーマルな表現に関する理解の調査)を解いてもらい、その解答を分析した。

上記調査においても、問題3)におけるテープ図と倍を表す数直線を組み合わせた図(日頃から見慣れないプリフォーマルな表現)の解釈には困難が伴い、問題場面の理解や問題解決には有効に機能していない可能性が高いことが確認できた。また、問題2)の結果からは、2本のテープの長さの量的関係を捉える所に児童の困難がある(相当数の児童は一方の量にしか目が向かない、あるいは全体量が揃っている場合にしか倍・割合関係を考えられない)ことが示唆された。そうした結果は、倍・割合に関するインフォーマルな表現の抽出を狙った問題1)における「白黒のおもりの重さの関係を説明する際に『3倍』のような数的関係表現を欠いてしまうことがある」という結果と整合していると考えられた。これらの結果に関する考察から、インフォーマルな表現に具体的な数的関係表現を徐々に混入させつつプリフォーマルな表現に導いていくという指導の方向性が示唆され、調査対象の児童に馴染みのある関係図の導入時の指導に関して、指導の道筋を明らかにすることができた。

なお、これらの成果は、「5. 主な発表論文」〔雑誌論文〕の2番目『イブシロン』誌63巻に掲載された論文にまとめられている。

(3) 2022年度は、前年度と同様の調査問題1),3)を使い、正式な割合指導前に児童が持つ倍・割合に関するインフォーマルな表現やプリフォーマルな表現を調査することからはじめ、その結果と過去の文献レビューに基づいて、a)「関係図」のかき方とを使った式による立式、b)問題文の言い換え、c)関係図の構成法・代替としてのジェスチャー、d)インフォーマルな表現によるテープ図解釈の補完、という整数倍の復習を利用した4つの指導・活動をデザインした。その上で、割合指導直前の分数倍の指導で、それら全ての指導・活動を組み込んだ指導を行い、その後の割合指導では、4つの中で児童が好む表現を使いつつ指導を行っていった。

事後調査では、割合に関するプリフォーマルな表現の全面的な理解を促し、そこからフォーマルな表現への移行を積極的に促すまでには至らなかったが、全国学力・学習状況調査の過去問題における正答率の高さや、多くの児童がジェスチャーを併用して正確な関係図をかくことができていたという結果が得られ、特に(c)の指導は、インフォーマルな表現に基づくプリフォーマルな表現(関係図)の構成・解釈を一定程度下支えしている可能性が高いことなどが示唆された。具体的には、第2回事後調査の結果において、調査クラスの児童の多くは、図の種類を指定されなければ関係図をかくことが(つまり、プリフォーマルな表現に基づいて倍や割合を考えることが)デフォルトになっており、しかも、児童の8割強が正しい図をかけていたところはポイントであった。これは、フォーマルな表現に至る前のプリフォーマルな表現までであれば、多くの児童が、問題場面を表す文章を適切にプリフォーマルな表現に翻訳できることを意味している(実際には、2/3の児童は図と式の両方で正答している)。しかも、第1回事後調査とそこでのアンケート調査から、関係図とは異なるテープ図が与えられていたとしても、調査クラスの児童は立式に際して関係図のインフォーマル版と考えられるジェスチャーを使用する傾向が高く(7

割五分強), 関係図とジェスチャーを同時併用する傾向も高いのであるから(5割強), c)で行ったジェスチャー表現の定式化は, インフォーマルな表現からプリフォーマルな表現である関係図の解釈を下支えしている可能性は高く, そこからフォーマルな表現(立式)に至っている可能性が高いと考えられた。

なお, これらの成果は, 「5. 主な発表論文」〔雑誌論文〕の1番目『イプシロン』誌64巻に掲載された論文にまとめられている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 山田篤史・木下匠	4. 巻 64
2. 論文標題 インフォーマルな表現からプリフォーマルな表現への移行とそれらの理解を支える割合指導	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』	6. 最初と最後の頁 27-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 山田篤史・木下匠	4. 巻 63
2. 論文標題 第5学年の正式な割合指導前における児童の倍・割合の捉え方	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』	6. 最初と最後の頁 11-22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 山田篤史	4. 巻 62
2. 論文標題 比・比例・割合の概念形成の一環としてのプリフォーマルな表現の理解を支える諸活動	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 愛知教育大学数学教育学会誌『イブシロン』	6. 最初と最後の頁 43-52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------