

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 1 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03505

研究課題名(和文) 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な構成と自己同型群の研究

研究課題名(英文) Research on uniform construction and automorphism groups of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24

研究代表者

島倉 裕樹 (Shimakura, Hiroki)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：90399791

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000 円

研究成果の概要(和文)：中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類は、ムーンシャイン頂点作用素代数の特徴付けを除いて研究開始時に個別の方法で解決されていた。したがって、統一的な分類方法が望まれていた。

本研究では、ムーンシャイン頂点作用素代数以外の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な構成および一意性の証明方法を確立した。その応用として、これらの自己同型群の構造を決定した。そのために、リーチ格子の部分格子に着目し、そこから得られる格子頂点作用素代数の軌道体の自己同型群の決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類問題は、数理論理学における 2 次元共形場理論のある種の分類問題に対応しており、作用素環論などの他の数学分野でも注目されている問題であった。したがって、この問題への新しい解決法が与える影響は大きい。本研究結果はすでにいくつかの数理論理学等の研究で応用されている。また、自己同型群の群構造や正則頂点作用素代数の記述を通じて、有限群論や組合せ論への繋がりも見つかった。

研究成果の概要(英文)：The classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 are done by case-by-case analysis except for the characterization of the moonshine vertex operator algebra. Hence a uniform proof for the classification is expected.

In this research project, we give a uniform construction and classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 except for the characterization of the moonshine vertex operator algebra. As an application, we determine their automorphism groups. In order to do so, we focus on some sublattices of the Leech lattice and determine the automorphism groups of the orbifolds of the associated lattice vertex operator algebras.

研究分野：頂点作用素代数

キーワード：代数学 頂点作用素代数 正則頂点作用素代数 自己同型群 リーチ格子

## 1. 研究開始当初の背景

中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類問題は、頂点作用素代数の研究開始当初からの基本的問題であった。特に、正則頂点作用素代数の共形重さ 1 の空間のリー代数構造が 71 個通りであることが理論物理学で示されたため、これらリー代数に対して、それを内包する正則頂点作用素代数がただ一つ存在することが期待されていた。その後、軌道体構成法の理論が確立されたことにより、71 個の正則頂点作用素代数の構成が 2016 年に完了した。また、逆軌道体構成法を用いた一意性の証明方法が提案され、2018 年にリー代数が自明でない 70 個に対して、リー代数構造から正則頂点作用素代数がただ一つに決まる一意性が証明された。しかしながら、構成も一意性も軌道体構成法を複数回組み合わせさせた事による個別の証明であり、さらなる理解のために統一的な証明が望まれていた。

また、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の自己同型群の決定は基本的かつ重要な問題の一つであった。特に、リー代数から得られるリー群以外の群構造の決定が本質的な問題であった。自己同型群は格子頂点作用素代数などの特別なクラスに対して決定されていたが、未決定のものも多く残されている状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な構成および一意性の証明を行うことである。また、その応用として、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の自己同型群の構成を決定することである。

## 3. 研究の方法

2017 年に Gerald Hoehn 氏によって提案された有限アーベル群上の二次形式と単純カレント拡大を組み合わせる方法を数学的に正当化し、統一的な構成方法と一意性の証明を行う。ここで拡大の元になる頂点作用素代数は 10 個ある。これらと適切な格子頂点作用素代数のテンソル積の単純カレント拡大として 70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を実現し、その同値類を分類する。そのために、まず、10 個の頂点作用素代数の自己同型群の決定を行う。これら 10 個はすべてリーチ格子の部分格子の軌道体として構成されている。このうち 5 個は素数位数の自己同型に付随する軌道体であり、先行研究で自己同型群が決定済みであった。残りの 5 個は位数が合成数の場合であるが、計算機等も使いながら自己同型群の決定を行う。二次形式を決定し、直交群の構造を見ることがポイントとなる。その後、単純カレント拡大として 70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を実現する。単純カレント拡大として得られる正則頂点作用素代数の同型類は二次形式に関する極大等方的部分空間の同型類に対応するため、10 個の自己同型群と格子頂点作用素代数の自己同型の構造を用いて構成と分類が可能である。これにより、構成と一意性の統一的な証明を同時に行うことができる。

その後、自己同型群の決定を行う。まず、10 個の自己同型群と格子頂点作用素代数の自己同型の直積のうち、拡大を保つ部分群を決定し、この部分群が誘導する群を決定する。ここから、リー代数上への外部自己同型群とリー代数上に自明に作用する部分群を求める。

## 4. 研究成果

本研究成果によって研究の目的である中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な構成およびムーンシャイン頂点作用素代数以外の 70 個の統一的な一意性の証明が完成した。さらに、これら正則頂点作用素代数の自己同型群の構造も決定した。

本研究は計画通りの研究方法を行い、期待される成果を出すことが出来た。まず、位数が合成数である 5 個の場合のリーチ格子の部分格子に付随する格子頂点作用素代数の軌道体の自己同型群の構造を決定した。頂点作用素代数から得られる二次形式を持つ有限アーベル群の直交群を具体的に計算し、群論的な性質を用いて、群構造を決定した。この成果に基づき、単純カレント拡大の理論を用いて、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成および一意性の証明を行った。また、自己同型群の決定も行った。具体的にはリー代数の外部自己同型と置換から得られる外部自己同型群とリー代数上に自明に作用する群の構造の決定を行った。どちらも格子の自己同型群の計算に帰着させ、計算機を用いながら、群構造の決定を行った。これらを表としてまとめており、既に他の研究者によって使われている。また、本研究を遂行中に副産物としていくつかの研究成果を得ることが出来た。

まず、リーチ格子頂点作用素代数から軌道体構成法ですべての中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を構成できることを証明した。本研究目的の一部の別証明となっている。

さらに、格子頂点作用素代数の軌道体の自己同型群を研究した。特に、構成法 B で得られる偶

格子に対して、付随する格子頂点作用素代数の軌道体が例外的な自己同型を持つことを証明した。また、素数位数の場合に、例外的な自己同型を持つような格子の分類を行った。その結果、構成法 B で得られるか、リーチ格子の部分格子となることがわかった。これはリーチ格子の特殊性を示す成果の一つとなっている。また、位数が合成数の場合が残されており、今後の課題となっている。

具体的な研究成果は次の通りである。

- (1) ある種の次元公式を作り、その応用として、リーチ格子頂点作用素代数から 71 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数が軌道体構成法を用いて構成できることを証明した。実際には、正則頂点作用素代数の自己同型で固定点のリー代数が可換になるものを見つけ、軌道体構成法を適用することで、リーチ格子頂点作用素代数が得られることを示した。この逆を辿ることで、目的の主張が得られる。また、部分的に中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一意性の証明も行った。
- (2) リーチ格子の 5 個の部分格子に付随する格子頂点作用素代数の軌道体の自己同型群を決定した。この 5 個は中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の研究に必須なものである。二次形式を決定し、その直交群を決定することで、問題を解決した。また、これらの部分格子が構成法 B で得られることを証明した。そこから例外的な自己同型を持つことがわかり、その既約加群への作用を具体的に記述した。そして、直交群の部分群の分類を用いて群構造を決定した。
- (3) 指標がある種の微分方程式を満たす頂点作用素代数の分類を行った。特に中心電荷が 8 と 16 の場合に着目し、ある種の仮定の下で、格子頂点作用素代数に限ることを証明した。特に、微分方程式から得られる条件を用いて、いくつかの格子頂点作用素代数の特徴づけも行っている。
- (4) 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な構成法およびムーンシャイン頂点作用素代数以外の 70 個の場合に対する統一的な一意性の証明を与えた。さらに自己同型群の構造も決定し、リー群以外の部分の有限群の構造をリストとして与えた。特に、10 個の頂点作用素代数と格子頂点作用素代数の単純カレント拡大として 70 個の中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を記述し、拡大の様子がリー代数構造から一意的に決まることを証明した。この結果は、格子の自己同型群の構造を使った頂点作用素代数の自己同型群の群構造の決定方法を提供した。
- (5) 格子頂点作用素代数の軌道体が例外的な自己同型を持つ場合を調べた。まず、格子が構成法 B で得られるときに例外的な自己同型を持つことを構成的に証明した。また、素数位数の場合に格子が構成法 B で得られるか、またはリーチ格子の部分格子となることを証明した。特に、格子頂点作用素代数の部分加群の軌道に捻じれ型が含まれている場合はリーチ格子の部分格子になることを証明している。この成果は例外型の自己同型の研究の大きな助けとなる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Jiao Xiangyu, Nagatomo Kiyokazu, Sakai Yuichi, Shimakura Hiroki	4. 巻 614
2. 論文標題 Vertex operator algebras with positive central charges whose dimensions of weight one spaces are 8 and 16	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 330 ~ 361
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2022.10.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Betsumiya Koichi, Lam Ching Hung, Shimakura Hiroki	4. 巻 399
2. 論文標題 Automorphism Groups and Uniqueness of Holomorphic Vertex Operator Algebras of Central Charge 24	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1773 ~ 1810
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04585-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Betsumiya Koichi, Lam Ching Hung, Shimakura Hiroki	4. 巻 259
2. 論文標題 Automorphism groups of cyclic orbifold vertex operator algebras associated with the Leech lattice and some non-prime isometries	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 621 ~ 650
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-023-2552-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 van Ekeren Jethro, Lam Ching Hung, Moller Sven, Shimakura Hiroki	4. 巻 380
2. 論文標題 Schellekens' list and the very strange formula	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107567 ~ 107567
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107567	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lam Ching Hung, Shimakura Hiroki	4. 巻 228
2. 論文標題 Extra automorphisms of cyclic orbifolds of lattice vertex operator algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107454 ~ 107454
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2023.107454	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 H. Shimakura
2. 発表標題 Automorphism groups of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24
3. 学会等名 Conference in finite groups and vertex algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 島倉裕樹
2. 発表標題 Extra automorphisms of cyclic orbifolds of lattice vertex operator algebras
3. 学会等名 第 38 回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

## 8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
その他の国・地域	Academia Sinica (台湾)			
中国	華東師範大学			
ブラジル	Universidade Federal Fluminense			
米国	Rutgers University			